

セルト固定座標系におけるセルトと机との接点座標導出法

鬼追 一雅*

(令和 6 年 9 月 19 日受付)

Method for Deriving the Position Coordinates of the Contact Point between a Celt and a Table in a Celt-Fixed Coordinate System

Kazumasa KIOI

(Received September 19, 2024)

Abstract

A celt, a type of boat-shaped top, rotates while rapidly changing the position of the contact point with the table. In this paper, we propose a method to derive the coordinates of the contact point between the celt and the table in a celt-fixed coordinate system from the Euler angles obtained by an IMU. The author confirmed that when a spin rotation is given in the strong reversal direction, a large elliptical contact point trajectory is drawn in the section from after release to the maximum spin angular velocity, and a linear contact point trajectory is drawn after the maximum spin angular velocity. We were able to directly observe from the sensor's angle data that roll vibration is dominant in the section from the first maximum spin angular velocity to the minimum spin angular velocity, and that pitch vibration is dominant in the section after the minimum spin angular velocity.

Key Words: celt, rattleback, IMU, contact point, moving coordinate system, body-fixed coordinate system

1. はじめに

舟形をしたコマの一種であるセルト (= ラトルバック) は、机の上で回すとガタガタ音をたてながらシーソーのように激しく振動し、いずれ自発的に逆方向の回転を始める。一見すると角運動量保存則を破っているかのように見える不思議な運動をする^[1]。

この現象はコマの慣性主軸と形状主軸のねじれに起因していることは知られているが、その運動の解析は意外と複雑である。セルトに関する研究は100年以上前から行われており^[2]、2008年には乾燥摩擦と接触面積に依存する効果を含んだ理論^[3]が提案されるなど、現在も様々な研究がなされている^{[4][5][6][7][8][9]}。理論解析の進展に対して、その

運動特性の実験的な検証は十分になされているとは言えない。

筆者らは、これまでに様々な手法を用いてセルトの運動特性の実験的検証を進めてきた^{[10][11][12][13][14]}。セルトは机との接点の位置を目まぐるしく変化させながら回転運動をする。これまで接点の変化を実験的に取得するには机面にベビーパウダーを敷き詰めたり、セルト底面にインクを塗布するなど、力学的条件に強い影響を及ぼさざるを得なかった^[9]。そこで本論文では、慣性計測装置 (IMU) で取得した姿勢角からセルトと机面との接点の座標を導出す方法を提案した。これにより、接点における力学的条件に影響を与えることなく、その場観測によって運動座標系における接点の軌跡を正確に追跡することが可能となった。

* 広島工業大学情報学部情報工学科

さらに本手法を用いてセルトの接点軌跡を測定した。セルトには、形状主軸の x 軸に対して慣性主軸が正の角度にずれている L 体と、負の角度にずれている R 体が存在する^[11]。本実験では、最も標準的な条件である L 体を強反転方向（時計回り）にスピン回転させた時の接点軌跡を観測した。

その結果、最初に強反転方向にスピン回転を与えた場合はリリース後からスピン角速度極大までの区間では大きな楕円状の接点軌跡を描き、スピン角速度極大時以後は直線的な接点軌跡を描くことを確認した。最初のスピン角速度極大時からスピン角速度極小時までの区間ではロール振動が優勢であり、スピン角速度極小時後の区間ではピッチ振動が支配的であることをセンサの姿勢データから直接導出することができた。

2. セルトの幾何学

2.1. セルトの形状とセルト固定座標系

Fig.1は水平な机の上で回転中の半楕円体型セルトの姿勢を示している。机面とは接点 P_o で接している。ここで右手系の直交座標系 xyz を導入し、その原点を半楕円体上面の中心に一致するようとり、セルトに固定する。この座標系はセルトとともに運動する運動座標系であり、以後セルト固定座標系、あるいは $O\text{-}xyz$ と呼ぶ。 $O\text{-}xyz$ はセルトの形状主軸に一致している。

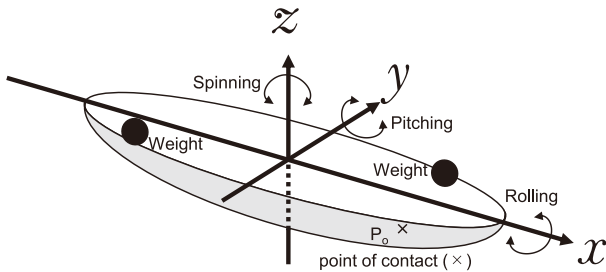


Fig.1 A celt-fixed coordinate system; a moving Cartesian coordinate system fixed to a semi-ellipsoidal celt. The x , y , and z -axes are the principal axes of the shape of the celt (= the principal axes of the geometric shape).

図中の黒丸は重りを示す。重りの存在によって慣性主軸は形状主軸と一致しなくなる。これにより z 軸周りに反転トルクが発生し、 z 軸周りの回転（＝スピン回転）方向が変わる。

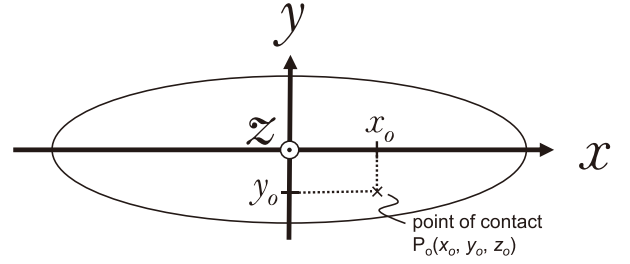


Fig.2 The purpose is to plot the trajectory of contact points of $O\text{-}xyz$ fixed to the moving celt as viewed from the z -axis direction.

本論文では Fig.2に示すように、運動しているセルト固定座標系 $O\text{-}xyz$ の z 軸方向から xy 平面上に射影した接点の座標を測定する方法を提案する。接点座標を時々刻々追跡することによって接点軌跡を描くことが可能となる。

2.2. ZYX オイラー角による座標軸変換

ここで机に固定された机固定座標系 $O\text{-}XYZ$ を導入する。この右手系直交座標系は本実験系においては静止座標系として扱える。以後、机固定座標系、あるいは $O\text{-}XYZ$ と呼ぶ。 $O\text{-}XYZ$ と $O\text{-}xyz$ の原点は一致しているものとする。

机固定座標系 $O\text{-}XYZ$ における点 P の座標成分 (X, Y, Z) がセルト固定座標系 $O\text{-}xyz$ では座標成分 (x, y, z) となっているとする。原点を同じくする三次元空間内の二つの直交座標系同士の関係はオイラー角によって表現できる。オイラー角には回転順序の定義方法によって12通りの表現が存在するが、その内の一つである ZYX オイラー角を採用する。セルト固定座標系 $O\text{-}xyz$ における点 P の座標成分 (x, y, z) は机固定座標系における座標成分 (X, Y, Z) から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_x R_y R_z \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1)$$

で求めることができる。ここで R_x , R_y , R_z は回転行列である。式 (1) は $O\text{-}XYZ$ において点 P をオイラー角に従って回転させた後の点 P' の座標を求める式ではなく、点 P の $O\text{-}XYZ$ 上での座標値 (X, Y, Z) から同じ点 P の $O\text{-}xyz$ 上での座標値 (x, y, z) を求める式である。

Fig.3に ZYX オイラー角による座標軸変換の様子を図示する。 ZYX オイラー角による座標軸の変換は、まず $O\text{-}XYZ$ の Z 軸周りに右ねじ方向に ψ だけ回転した座標成分

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \equiv R_z(\psi) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2)$$

を得る。Z 軸周りの回転なので $Z'=Z$ である。

次に ψ 回転後の座標軸 Y' 軸周りに右ねじ方向に θ だけ回転した座標成分

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \equiv R_Y(\theta) \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad (3)$$

を得る。Y' 軸周りの回転なので $Y''=Y'$ である。更に θ 回転後の座標軸 X'' 軸周りに右ねじ方向に ϕ だけ回転した座標成分

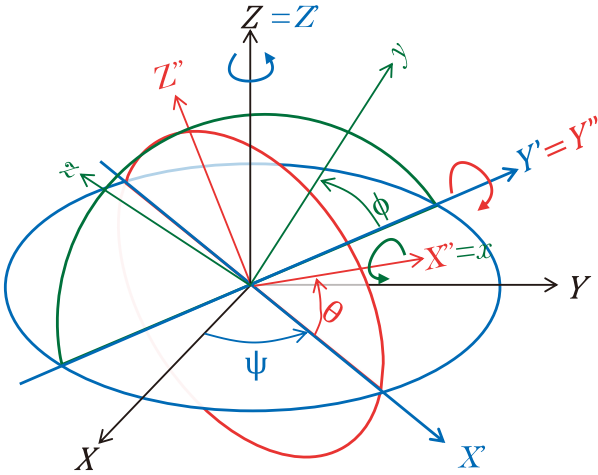


Fig.3 Transformation from a table-fixed coordinate system O-XYZ to a celt-fixed coordinate system O-xyz. ZYX Euler angles are used.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} \equiv R_X(\phi) \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} \quad (4)$$

を得る。X'' 軸周りの回転なので $x=X''$ である。以上の式は机固定座標系 O-XYZ において測定した点 P の座標成分 (X, Y, Z) をセルト固定座標系 O-xyz において測定すると (x, y, z) であることを示している。

3. 接点座標の導出

3.1. 半楕円体型セルトとその接平面

ここで Fig.4 のように半楕円体型セルトの底面と接触している接平面を考える。セルト固定座標系 O-xyz における楕円面は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

と書ける。ここで a, b, c はそれぞれ半楕円体の長軸半径、短軸半径、極軸半径である。この楕円面上にある接点 P_0 (x_0, y_0, z_0) で接する接平面の式は

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1 \quad (6)$$

となる。一方、方向余弦 λ_x, μ_y, ν_z を持ち、かつ、式 (5) の楕円面に接する接平面は、

$$\lambda_x x + \mu_y y + \nu_z z = \pm \sqrt{a^2 \lambda_x^2 + b^2 \mu_y^2 + c^2 \nu_z^2} \quad (7)$$

である。ここで

$$A = \pm \sqrt{a^2 \lambda_x^2 + b^2 \mu_y^2 + c^2 \nu_z^2} \quad (8)$$

と置く。式 (6) の平面と式 (7) の平面が一致するとき、

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{a^2}{A} \lambda_x, \frac{b^2}{A} \mu_y, \frac{c^2}{A} \nu_z \right) \quad (9)$$

が成り立っている。半楕円体なので方向余弦 λ_x, μ_y, ν_z を持つ接平面が 2 つ存在するが、

$$z_0 = \frac{c^2}{A} \nu_z < 0 \quad (10)$$

の条件から A の符号が決まる。以上から、式 (9) によってセルト固定座標系 O-xyz における接点 P_0 の座標 (x_0, y_0, z_0) を得ることができる。 a, b, c はセルトの形状によって決定される値であり、接平面の方向余弦 λ_x, μ_y, ν_z は机面に対するセルトの姿勢角によって決定される値である。従って、時々刻々の姿勢変動に伴う接点の座標を得るためには、時々刻々の接平面の方向余弦 λ_x, μ_y, ν_z が判れば良い。

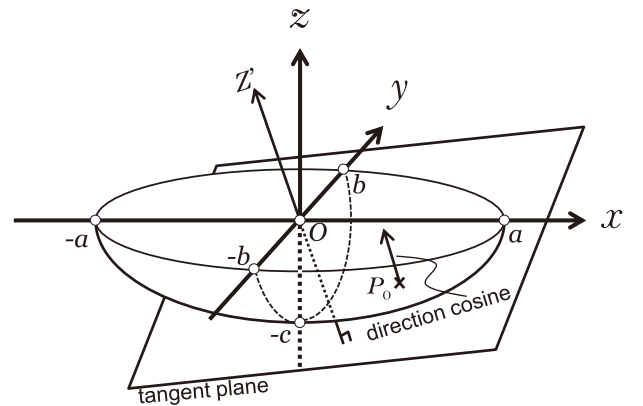


Fig.4 A diagram of a semi-ellipsoidal celt and the tangent plane. The xy plane of the celt-fixed coordinate system O-xyz was drawn horizontally. The point of contact is P_0 . The Z' is the perpendicular line from the origin O to the tangent plane.

3.2. 姿勢角測定値からの接点座標導出手順

時々刻々の接平面の方向余弦 $\lambda_x(t)$, $\mu_y(t)$, $\nu_z(t)$ を得るためには机固定座標系 O-XYZ に対するセルト固定座標系 O-xyz の方向角が分かればよい。それはセルト本体の姿勢角に他ならない。

セルト本体の上面に慣性計測装置を装着すると時々刻々のセルトの姿勢角をその場観測することが可能になる。我々の研究室では WITmotion 社製 BWT901^[15] などの慣性計測装置を用いてセルトの運動のその場観測を行い、接点軌跡の観測を実現した。BWT901は ZYX オイラー角の定義に基づいてスピン角（ヨー角）AngleZ（= ψ ）、ピッチ角 AngleY（= θ ）、ロール角 AngleX（= ϕ ）を出力する。運動開始前の机上で静止させた状態でキャリブレーションを行う。従って、この ψ , θ , ϕ は机固定座標系 O-XYZ に対するセルト固定座標系 O-xyz のオイラー角であり、O-XYZ に対するセルトの姿勢を一意に定める。

運動中のセルトの姿勢は時々刻々変化するが、接平面は XY 平面と平行だから接平面の方向余弦は常に Z 軸の方向と一致している。O-XYZ の Z 軸周りに ψ 回転した座標系 O-X'Y'Z' の Z' 軸は元の Z 軸と共通であるから、Z' 軸の方向も常に接平面の方向余弦と一致しており、X'Y' 平面も接平面と平行である。

ゆえに ψ 回転座標系 O-X'Y'Z' における接平面の方向余弦ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \lambda_{X'} \\ \mu_{Y'} \\ \nu_{Z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

である。

次に O-X'Y'Z' を Y' 軸周りに θ 回転させた座標系 O-X''Y''Z'' において、接平面の方向余弦ベクトルは回転ベクトルを用いて求めることができ、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_{X''} \\ \mu_{Y''} \\ \nu_{Z''} \end{pmatrix} &= R_Y(\theta) \begin{pmatrix} \lambda_{X'} \\ \mu_{Y'} \\ \nu_{Z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

である。更に O-X''Y''Z'' を X'' 軸周りに ϕ 回転させたセルト固定座標系 O-xyz において、接平面の方向余弦ベクトルは

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_x \\ \mu_y \\ \nu_z \end{pmatrix} &= R_X(\phi) \begin{pmatrix} \lambda_{X''} \\ \mu_{Y''} \\ \nu_{Z''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

である。

すなわち慣性計測装置によって時刻 t における ZYX オイラー角 $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\phi(t)$ が定まれば、式 (13) によって時刻 t における接平面の方向余弦ベクトル $(\lambda_x(t), \mu_y(t), \nu_z(t))$ を得ることができ、これを式 (9) に代入すれば、セルト固定座標系 O-xyz における接点 $P_o(t)$ の座標が導出できる。式 (13) はスピン角（ヨー角）AngleZ（= ψ ）を含まない式であり、ピッチ角 AngleY（= θ ）とロール角 AngleX（= ϕ ）とだけで決まる。最終的に、セルト固定座標系 O-xyz の z 軸方向から見た接点の座標 (x_0, y_0) は

$$(x_0(t), y_0(t)) = \left(-\frac{a^2}{A} \sin \theta(t), \frac{b^2}{A} \sin \phi(t) \cos \theta(t) \right) \quad (14)$$

によって定めることができる。

4. IMU測定データからの接点軌跡導出結果と考察

4.1. L 体セルトの運動座標系接点軌跡導出例 1

本手法を用いてセルトの接点軌跡を測定した。セルトには、形状主軸の x 軸に対して慣性主軸が正の角度にずれている L 体と、負の角度にずれている R 体が存在する^[8]。本実験では、最も標準的な条件である L 体を強反転方向（L 体では時計回り）にスピン回転させた時の接点軌跡を観測した。

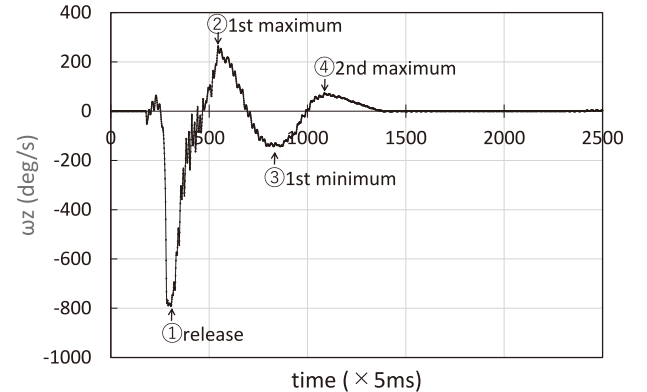


Fig.5 Time-varying characteristics of angular velocity ω_z around the z-axis in the celt-fixed coordinate system O-xyz.

Fig.5はセルト固定座標系 O-xyz の z 軸周角速度 ω_z の時間変化を測定した結果である。セルトは亚克力製を用い、サイズは長軸半径 $a=50\text{mm}$ 、短軸半径 $b=20\text{mm}$ 、極軸半径 $c=10\text{mm}$ である。重りは直径 10mm 、 6.0g の鉛を円板上に加工している。重りねじれ角 $\zeta=15^\circ$ の L 体セルトである。

本手法を用いてセルトの接点軌跡を測定した結果、最初に強反転方向にスピン回転を与えた場合は①リリース後から②スピン角速度極大までの区間では大きな楕円状の接点軌跡を描き、②スピン角速度極大時以後は直線的な接点軌跡を描くことを確認した。②最初のスピン角速度極大時から③スピン角速度極小までの区間ではロール振動が優勢であり、③スピン角速度極小後の区間ではピッチ振動が支配的であることをセンサの姿勢データから直接観測することができた。以下、その詳細を述べる。

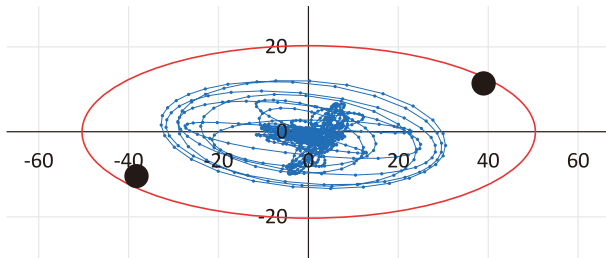


Fig.6 Contact point trajectory as viewed from the z -axis direction of the celt-fixed coordinate system O-xyz (unit: mm). ① The entire trajectory from release to stop in Fig.5.

Fig.6にセルト固定座標系 O-xyz の z 軸方向からみた接点軌跡を示す。Fig.5の①リリース後から停止までの全軌跡を表示している。測定時間間隔は 5ms である。図中の黒丸は重りの位置を示している。接点軌跡全体をみると大きな楕円状の軌跡と直線的な軌跡が混在していることがわかる。リリース後からスピン回転停止までに軌跡形状の特徴が変化している。軌跡形状の変化はスピン回転方向の反転を契機に生じるのではなく、スピン回転の角加速度方向すなわちトルクの回転方向に依存して変化することが分かった。以下、その詳細を述べる。

Fig.7は①リリース直後から② ω_z 極大までの楕円形状接点軌跡を取り出した図である。リリース直後のセルトのスピン回転方向は強反転方向（L 体では時計回り）である。従って、この区間では反時計回りのトルクが働いている。リリース時点では原点付近に接点があるが、すぐに大きな楕円状の接点軌跡を描くようになる。その後も楕円状の接点軌跡を描きながら z 軸周りのスピン回転速度が徐々に低下し、後半区間ではスピン回転方向は弱反転方向（反時計回り）に反転している。オイラーの円板に似た運動をして

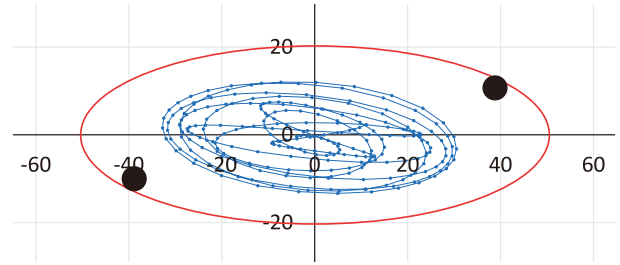


Fig.7 The contact point trajectory (unit: mm) as viewed from the z -axis direction of the celt-fixed coordinate system O-xyz. The elliptical contact point trajectory in Fig.5 was extracted from ① immediately after release to ②1st local maximum of ω_z .

いるようだ。オイラーの円板は円板の縁の1点が机と接触し、その接点が円を描く。円板の円周よりも接点の軌跡の方が短いので1周しても元の状態には戻らない非ホロミック系である。セルトの場合は更に z 軸周りに高速な回転が加わっており、オイラーの円板と同じではない。

楕円状の接点軌跡は最初は右回りに軌跡を描いているが、途中で形状が乱れている。セルトの接点軌跡の詳細な振舞いについては今後、更に解析が必要である。

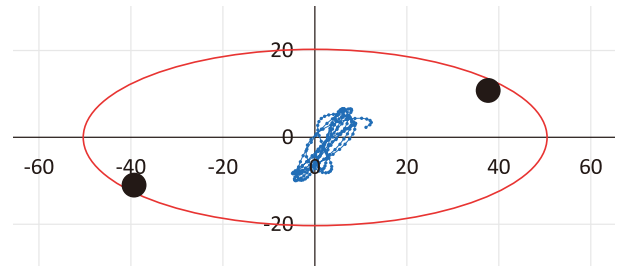


Fig.8 The contact point trajectory (unit: mm) as seen from the z -axis direction of the celt-fixed coordinate system O-xyz. The linear contact point trajectory section from ②1st local maximum of ω_z to ③1st local minimum of ω_z in Fig.5 was extracted.

Fig.8は② ω_z 極大から③ ω_z 極小までの直線的な接点軌跡区間を取り出した図である。② ω_z 極大後のスピン回転方向は弱反転方向（反時計回り）である。従って、この区間では時計回りのトルクが働いている。徐々にスピン回転速度は減速し、やがて反転して後半区間では強反転方向（時計回り）にスピン回転している。この区間ではロール振動が優勢であることがわかる。接点軌跡は形状主軸（ y 軸）に沿っておらず、ロール振動と同位相のピッチ振動を伴って振動している。

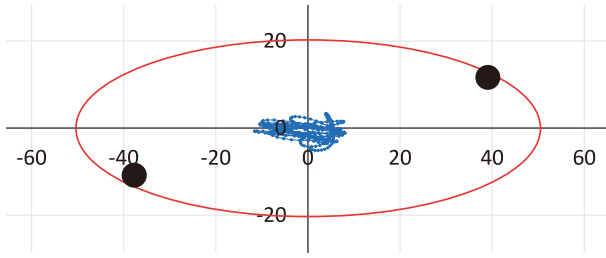


Fig.9 The contact point trajectory (unit: mm) as seen from the z-axis direction of the celt-fixed coordinate system O-xyz. The linear contact point trajectory section from ③1st local minimum of ω_z to ④2nd local maximum of ω_z in Fig.5 was extracted.

Fig.9は③ ω_z 極小～④ ω_z 極大までの直線的な接点軌跡区間を取り出した図である。③ ω_z 極小後のスピン回転方向は強反転方向（時計回り）である。従って、この区間では再び反時計回りのトルクが働いている。Fig.7と同じ強反転方向のスピン回転であるが、この区間では直線的な形状をしている。z 軸周りのスピン回転速度は徐々に減速し、後半区間では弱反転方向（反時計回り）にスピン回転している。接点軌跡はほぼ形状主軸（x 軸）に沿っており、ピッチ振動が支配的であることがわかる。

4. 2. L 体セルトの運動座標系接点軌跡導出例 2

本手法を用いてセルトの接点軌跡を測定した他の例を以下に示す。本実験も L 体を強反転方向（L 体では時計回り）にスピン回転させた時の接点軌跡を観測した。

Fig.10はセルト固定座標系 O-xyz の z 軸周り角速度 ω_z の時間変化を測定した結果である。セルトは底面研磨前のプラスチック製を用い、サイズは長軸半径 $a=100\text{mm}$ 、短軸半径 $b=15\text{mm}$ 、極軸半径 $c=10\text{mm}$ である。重りは直径 10mm 、 6.0g の鉛を円板上に加工している。重りねじれ角 $\zeta=5^\circ$ の L 体セルトである。このように上面の楕円率 $b/a (=0.15)$ が小さい形状をしたセルトは強反転方向に回転しているときの反転トルクが大きい^[11]。また極軸半径 c と短軸半径 b の比 $c/b=1.0$ なので短軸に沿った断面は半円である。この条件では弱反転方向回転時のスピン反転トルクは小さいのでスピン反転は 1 度だけしか生じず、逆方向（左回転）の角速度が最大になった②の後は停止に向かう。

Fig.11に①リリース後から②角速度 ω_z 極大までの区間を接点軌跡を示す。弱反転方向（反時計回り）へのトルクが働いている区間である。微小振動はほとんど観測されない。また Fig.7 のような楕円状の軌跡は出現せず、ほぼピッチ振動のみの接点軌跡が観測された。

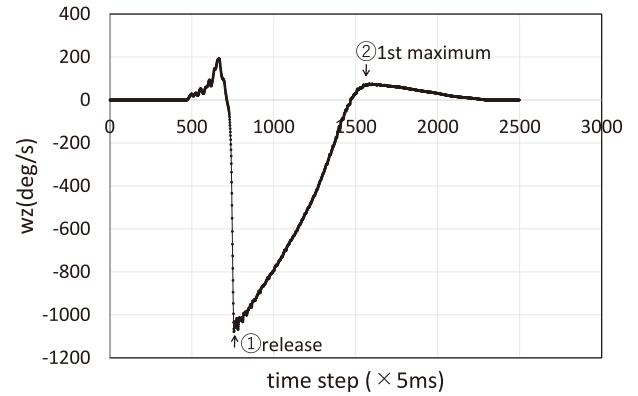


Fig.10 Time-varying characteristics of angular velocity ω_z around the z-axis in the celt-fixed coordinate system O-xyz. W₄ (100-15-10) full color plastic body before polishing. A 6.0g weight ($\phi=10\text{mm}$) is placed on each end at the weight skew angle $\zeta=5^\circ$ (L-body).

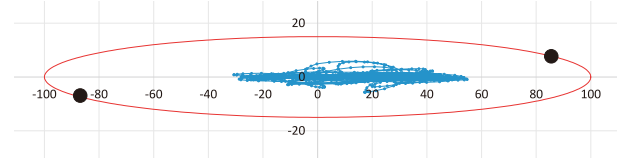


Fig.11 The contact point trajectory (unit: mm) as viewed from the z-axis direction of the celt-fixed coordinate system O-xyz. The contact point trajectory in Fig.10 was taken from ① immediately after release to ② 1st local maximum of ω_z .

Fig.12は②角速度 ω_z 極大から停止までの区間の接点軌跡である。強反転方向（時計回り）へのトルクが働いている区間である。Fig.8とは異なり、弱反転方向のスピン回転時であってもロール振動の増大は見られず、ほぼ純粋なピッチ振動だけが生じているようである。

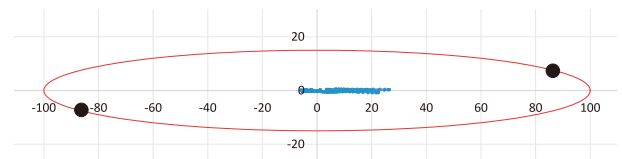


Fig.12 The contact point trajectory (unit: mm) as seen from the z-axis direction of the celt-fixed coordinate system O-xyz. The contact point trajectory after ② 1st local maximum of ω_z in Fig.10 was extracted.

Fig.13はセルト固定座標系 O-xyz の z 軸周り角速度 ω_z の時間変化を測定した結果である。Fig.10と同じセルトを用いて重りの重さだけを変えた。重りは円板上に加工した 6.0g の鉛 2 個を重りねじれ角 $\zeta=5^\circ$ (L 体) の両位置に設置した。

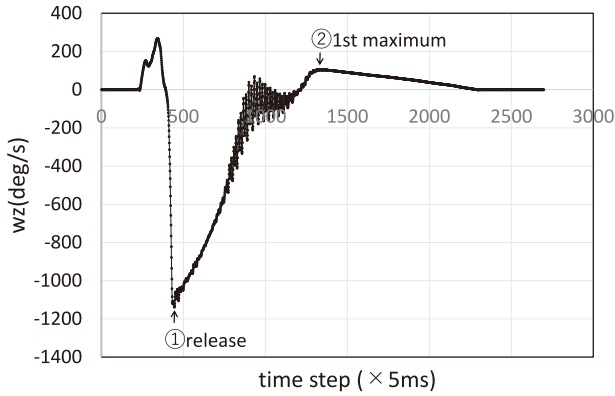


Fig.13 Time-varying characteristics in angular velocity ω_z around the z-axis of the celt-fixed coordinate system O-xyz. W₄ (100-15-10) full color plastic body before polishing. Using the same celt as in Fig.10, two 10mm ϕ (6.0g) weights were placed at each end of the weight skew angle $\zeta = 5^\circ$ (L body).

リリース後の角速度 ω_z は激しい微小振動を伴いながら逆回転方向に加速される。セルトの質量に対して重りの質量が相対的に大きくなると微小振動が顕著になる可能性がある。

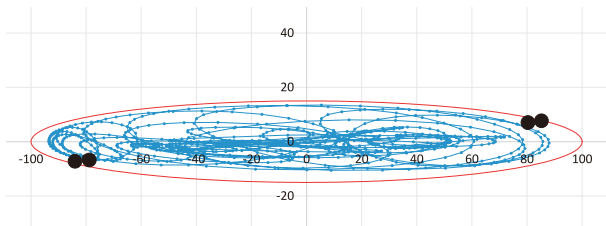


Fig.14 The contact point trajectory (unit: mm) as viewed from the z-axis direction of the celt-fixed coordinate system O-xyz. The contact point trajectory in Fig.13 was taken from ① immediately after release to ② 1st local maximum of ω_z .

Fig.14はFig.13の①リリースから②角速度 ω_z 極大までの区間の接点軌跡である。Fig.11とは異なり、楕円形状の接点軌跡になるが、Fig.7のような単純な楕円状軌跡ではなく、小さな楕円状軌跡を描きながらセルト底面内を移動しているようである。すなわちセルトの長軸方向の片方が持ち上がった状態で第2象限と第3象限内で楕円状軌跡を描いたり、第1象限と第4象限内で楕円状軌跡を描いているのが観察される。

Fig.15は②角速度 ω_z 極大から停止までの区間の接点軌跡である。Fig.12と同様にほぼ純粋なピッチ振動だけが見られるが、ピッチ振動の周期は非常にゆっくりであり、静かに停止に向かっている。

ここに掲載した接点軌跡は一例にすぎず、セルトのサイズや重りの重さとねじれ角、更には初速の与え方や机面の

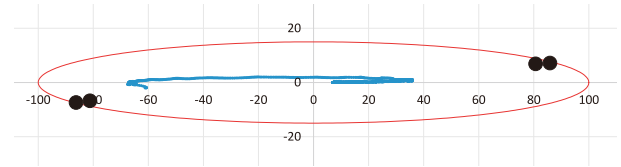


Fig.15 The contact point trajectory (unit: mm) as seen from the z-axis direction of the celt-fixed coordinate system O-xyz. The contact point trajectory after ② 1st local maximum of ω_z in Fig.13 was extracted.

平坦性、セルト底面と机面との摩擦係数など、種々の条件によって接点軌跡の特徴は異なると予測される。更に実験を重ねることによって、接点軌跡に関する統一的な理解が得られることが期待される。

5. まとめ

慣性計測装置 (IMU) で取得した姿勢角を用いることによって、セルトに固定された運動座標系から観察した場合のセルトと机との接点座標を導出する方法を提案した。

本手法を用いて長軸半径 $a=50\text{mm}$ 、短軸半径 $b=20\text{mm}$ 、極軸半径 $c=10\text{mm}$ のアクリル製セルトの接点軌跡を導出した。結果、初速として強反転方向にスピン回転を与えた場合はリリース後からスピン角速度極大までの区間では大きな楕円状の接点軌跡を描き、スピン角速度極大時以後は直線的な接点軌跡を描くことを確認した。最初のスピン角速度極大時からスピン角速度極小時までの区間ではロール振動が優勢であり、スピン角速度極小時後の区間ではピッチ振動が支配的であることをセンサの姿勢データから直接観測することができた。

軌跡形状の変化はスピン回転方向の反転を契機に生じるのではなく、スピン回転の角加速度方向すなわちトルクの回転方向に依存して変化することが分かった。

またスピン反転が1回しか生じない長軸半径 $a=100\text{mm}$ 、短軸半径 $b=15\text{mm}$ 、極軸半径 $c=10\text{mm}$ のプラスチック製セルトの接点軌跡は上記アクリル製セルトとは大きく異なる接点軌跡を描くことを確認した。

セルトのサイズや重りの重さとねじれ角、更には初速の与え方や机面の平坦性、セルト底面と机面との摩擦係数など、種々の条件によって接点軌跡の特徴は異なると予測される。

謝 辞

接点座標導出式の検算をしていただいた直川耕祐准教授に感謝いたします。Fig.5からFig.9の実験結果は2021年度本学卒業生の竹内駿斗氏が在学中に取得したIMU生データをもとにして筆者が接点軌跡を解析した。実験データの保存に協力いただいた竹内氏に感謝いたします。

文 献

- [1] J. Walker, "The mysterious "rattleback": a stone that spins in one direction and then reverses," Scientific American, pp.172-184, Oct. 1979.
- [2] G. T. Walker, "On a Curious Dynamical Property of Celts," Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol.8, pt.5 (1895) pp. 305-306.
- [3] V. P. Zhuravlev and D. M. Klimov, " Global Motion of the Celt, " Mechanics of Solids, vol.43, no. Issue 3, pp. 320-327, June 2008.
- [4] H. Takano, "Spin Reversal of a Rattleback with Viscous Friction," Regular and Chaotic Dynamics, vol.19, Issue 1 (2014) pp.81-99.
- [5] G. Kudra and J. Awrejcewicz, "Application and experimental validation of new computational models of friction forces and rolling resistance", Acta Mechanica, vol.226, Issue 9, pp 2831-2848, Sep. 2015.
- [6] A. Nanda, P. Singla, M. A. Karami, "Energy harvesting using rattleback: Theoretical analysis and simulations of spin resonance," Journal of Sound and Vibration, Volume 369, 12 May 2016, Pages 195-208.
- [7] Y. Kondo and H. Nakanishi, "Rattleback dynamics and its reversal time of rotation", Phys. Rev. E 95, 062207 – Published 12 June 2017.
- [8] H. Moffatt and T. Tokieda, "Celt Reversals: A Prototype of Chiral Dynamics," Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A, 2008, vol.138, no.2, pp.361-368.
- [9] 小川陽弘, 大島裕子, セルトの研究, 可視化情報, Vol.19, No.74, pp.15-20, 1999.
- [10] 鬼追, セルトのスピン反転とカイラルやじろべえ, 広島工業大学紀要研究編, 第53巻 (2019), pp.117-123.
- [11] 鬼追, 半楕円体型セルトの主曲率とスピン反転回数に関する実験的特性, 可視化情報学会論文集, Vol.40, No.3, pp.1-8, 2020年3月.
- [12] 西, 藏田, 山本, 鬼追, ジャイロセンサを用いたセルトの角速度特性解析, 2020年度(第71回)電気・情報関連学会中国支部連合大会予稿集, R20-15-02-02, 2020年10月24日.
- [13] 徳原, 橋元, 前田, 鬼追, 初期角速度制御したセルトの静止座標系におけるスピン反転角測定, 広島工業大学紀要研究編, 第55巻 (2021), pp.41-45.
- [14] 青山, 鬼追, 慣性計測装置によるセルトの自発的跳躍測定, 広島工業大学紀要研究編, 第57巻 (2023), pp.27-31.
- [15] WITmotion, BWT901Manual.pdf, <https://drive.google.com/drive/folders/17vcWAXMVuI3MwN1rLpDS-p6UUPbq53j>,