広島工業大学紀要研究編
第59巻（2025）25-29
論　　文

ビークル（二輪モデル）動特性の位相平面における複素固有ベクトルの可視化

太田　利夫*・高畑　健二**

（令和6年11月1日受付）

Research of visualization of complex eigenvectors in the phase plane of vehicle (a linear bicycle model) dynamics

Toshio OTA, Kenji TAKAHATA

(Received November 1, 2024)

Abstract

In a linear bicycle model, for the Under Steer (US) vehicle, the eigenvalues and eigenvectors of the A matrix in the state equation are conjugate complex numbers. Therefore, they cannot be visualized by drawing them on a two-dimensional plane, as is the case with real eigenvalues and real eigenvectors. Similar studies of such visualization have been conducted in automotive and control engineering, where state trajectories are drawn in the phase state plane, but there appears to be no research on the visualization of complex eigenvectors. Eigenvectors, whether real or complex, are added to the phase state plane to visualize the relationship between the state and the eigenvector. The visualization of states and eigenvectors allows to determine the degree of convergence or divergence of states. Furthermore, if there are multiple eigenvectors, it is possible to know which eigenvector to converge to and to understand the state flow.

We report the results of our research on a method to reveal the relationship between states, eigenvalues and eigenvectors by quasi-visualizing the complex eigenvectors of the Under Steer vehicle.

Key Words: Eigenvector, Eigenvalues, Linear bicycle model, Under steer

1．はじめに

線形二輪モデルにおいて，US（Under Steer）ビークルの場合，状態方程式のA行列の固有値，固有ベクトルが共役複素数になり，実固有値，実固有ベクトルのように2次元平面へ描画して可視化することはできない．

また，そのような可視化に対する類似研究は自動車工学あるいは，制御工学の範囲では位相状態平面に状態軌道を描く事例[(1)～(6)]はあるが，複素固有ベクトルを可視化する研究はないようである．

固有ベクトルは実数，複素数を問わず位相状態面に追加することで状態と固有ベクトルの関係を可視化する．

状態と固有ベクトルの可視化は，状態の収束あるいは，発散の程度が把握できる．

さらに固有ベクトルが複数存在する場合には，どちらの固有ベクトルへ収束するか分かり状態の流れを把握できる．

そこで我々はUSビークルの複素固有ベクトルを擬似的

* 広島工業大学 工学部 知能機械工学科
** 元 広島工業大学 工学部 知能機械工学科

に可視化して状態と固有値および，固有ベクトルの関係を明らかにする方法を研究し成果を報告する．

本研究は，MATLAB®/Simulink® を MBD（Model Based Design）および，解析ツールとして使用した．

2．線形二輪モデル

解析に使用する線形二輪モデルの諸元を表1，運動方程式（状態方程式）を式（1）に示す．

$$\begin{bmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{bmatrix} \delta \qquad (1)$$

where,

$$A_{11} = \frac{2(l_f^2 \cdot C_f + l_r^2 \cdot C_r)}{I \cdot V}, A_{12} = \frac{2(l_r \cdot C_r - l_f \cdot C_f)}{I},$$

$$A_{21} = \frac{2(l_r \cdot C_r - l_f \cdot C_f)}{m \cdot V^2} - 1, A_{22} = \frac{2(C_f + C_r)}{m \cdot V},$$

$$B_{11} = \frac{2l_f C_f}{I}, B_{22} = \frac{2C_f}{m \cdot V}$$

Table1 Specification of vehicle model

δ[rad]	Front wheel steering angle	Control Input
r[1/s]	Yaw rate	State Variable
β[rad]	Side slip angle	
m[kg]	Vehicle mass	1460
I[kgm^2]	Yaw inertia moment	2050
l[mm]	Wheel base	2550
l_f[mm]	Distance from CG to Front wheel	1070
l_r[mm]	Distance from CG to Rear wheel	1480
C_f[kN/rad]	Front tire cornering stiffness/ 1 tire	US:34.5
		OS:50
C_r[kN/rad]	Rear tire cornering stiffness/ 1 tire	US:46
		OS: 34.5
V[m/s]	Vehicle velocity	Arbitrary

3．位相平面の状態軌道および，複素固有ベクトル図

3. 1　固有値，固有ベクトルが実数の場合

表1のOSの条件（式（2）で示す臨界速度 Vc 以下）で式（1）のシステム行列 A（A_{11}，A_{22}，A_{12}，A_{21}）に対応する A_{OS} 行列，固有値 λ_{OS1}，λ_{OS2}および，固有ベクトル v_{OS1}，v_{OS2}を式（3）～（5）に示す．なお．A_{11}と A_{22}はネガティブフィードバックを A 行列単体で示すように負としてある．このときの位相平面図を図1に示す．

$$Vc = \sqrt{-\frac{1}{SF}} \qquad (2)$$

where,

$$SF = \frac{m}{2l^2} \frac{l_r C_r - l_f C_f}{C_f C_r} = \frac{m}{2l^2} \left(\frac{l_r}{C_f} - \frac{l_f}{C_r} \right)$$

式（4），（5）および，図1から以下の考察を読み取ることができる．

・固有ベクトル v_{OS1}，v_{OS2}は実数であり，位相平面上に図示することができる．

・状態軌道は必ず固有ベクトル v_{OS2}上に乗って焦点（Focus）へ収束していくため，動安定（特性根，固有値に依存する安定）である．

・状態軌道が必ず固有ベクトル v_{OS2}上に乗る理由は v_{OS2}に対応する固有値 λ_{OS2}が動安定における代表特性根であり，λ_{OS2}の方が λ_{OS1}に比べ複素平面の原点に近く収束が遅れるためである．

$$A_{OS} = \begin{bmatrix} -2.98 & -3.26 \\ -1.01 & -2.69 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\lambda_{OS1} = -4.66 \Leftrightarrow v_{OS1} = \begin{bmatrix} -0.8902 \\ -0.4557 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\lambda_{OS2} = -1.02 \Leftrightarrow v_{OS2} = \begin{bmatrix} 0.8565 \\ -0.5162 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

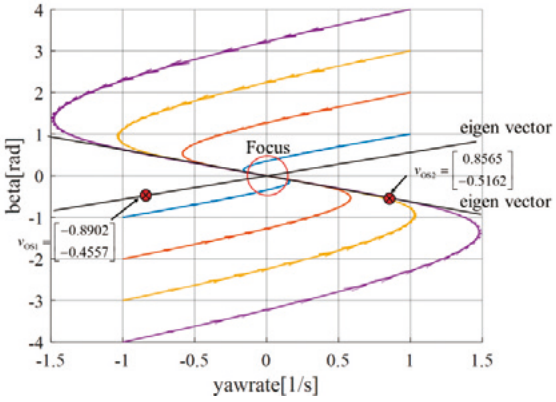

Fig.1 Phase plane of OS vehicles

3. 2　固有値，固有ベクトルが共役複素数の場合

表1のUSの条件で式（1）のシステム行列 A に対応する A_{US} 行列，固有値 λ_{US1}，λ_{US2}および，固有ベクトル v_{US1}，v_{US2}を式（6）～（8）に示す．なお．A_{11}と A_{22}はネガティブフィードバックを A 行列単体で示すように負としてある．このときの位相平面図を図2に示す．

式（7），（8）および，図2から以下の考察を読み取ることができる．

・状態軌道は焦点（Focus）へ渦巻状に収束していくため，動安定（特性根，固有値に依存する安定）である．

・固有ベクトル v_{US1}，v_{US2}は共役複素数であり，位相平面上に図示（可視化）できないため，状態軌道との関係を考察できない．

$$A_{US} = \begin{bmatrix} -4.0965 & 17.5317 \\ -0.9681 & -3.4027 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$\lambda_{US1}=\begin{bmatrix}-3.7496+4.1051j\\0+0j\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad v_{US1}=\begin{bmatrix}0.9735+0j\\0.0193+0.2279j\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{bmatrix}\qquad(7)$$

$$\lambda_{US2}=\begin{bmatrix}0+0j\\-3.7496-4.1051j\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad v_{US2}=\begin{bmatrix}0.9735+0j\\0.0193-0.2279j\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{bmatrix}\qquad(8)$$

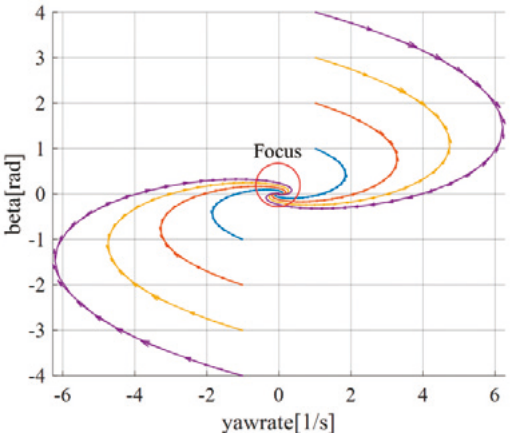

Fig.2 Phase plane of US vehicles

3. 3 複素固有ベクトルのブロック行列化

式（7），（8）で示した複素固有ベクトルを可視化するため，複素数の行列への変形を行う．

表 1 の諸元における A_{US} は式（9）のとおりである．

その複素固有ベクトルを式（10），複素固有値を式（11）に示す．さらに，複素固有ベクトル式（10），複素固有値式（11）を用いて対角化した A_{diag} を式（13）に示す．式（11），（13）をまとめ式（14）に示す．

なお，対角化の方法は式（12）に示す周知のものであり，線形代数における固有ベクトルの用途の一つである．

$$A_{US}=\begin{bmatrix}-4.0965 & 17.5317\\-0.9681 & -3.4027\end{bmatrix}\qquad(9)$$

$$\mathrm{EigenVector}_{US}=\begin{bmatrix}0.9735+0.000j & 0.9735+0.000j\\0.0193+0.2279j & 0.0193-0.2279j\end{bmatrix}\qquad(10)$$

$$\mathrm{EigenValues}_{US}=\begin{bmatrix}-3.7496+4.1051j & 0.000+0.0000j\\0.000+0.0000j & -3.7496-4.1051j\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}固有値_{11} & 0\\0 & 固有値_{22}\end{bmatrix}\qquad(11)$$

$$A_{diag}=\mathrm{EigenVector}_{US}^{-1}\cdot A_{US}\cdot\mathrm{EigenVector}_{US}\qquad(12)$$

$$A_{diag}=\begin{bmatrix}-3.7496+4.1051j & 0.000-0.000j\\0.0000+0.000j & -3.7496-4.1051j\end{bmatrix}\qquad(13)$$

$$\mathrm{EigenValues}_{US}=A_{diag}=\begin{bmatrix}\lambda_{11} & 0\\0 & \lambda_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3.7496+4.1051j & 0.000+0.0000j\\0.000+0.0000j & -3.7496-4.1051j\end{bmatrix}\qquad(14)$$

次に複素数と行列の関係を導出する．

オイラーの公式：$e^{j\pi}$=-1より式（15）が求まる．

$$j=\begin{bmatrix}\cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2)\\\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\qquad(15)$$

式（15）より複素数は式（16）で表すことが出来る．

$$a+bj=a\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}\qquad(16)$$

式（16）から複素数と行列の関係を式（17）として導出することが出来る．

$$a\pm bj\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a & \mp b\\\pm b & a\end{bmatrix}\qquad(17)$$

where,a,b : real number

式（17）の関係を使って式（14）の複素数の固有値を行列（18），（19）へ等価変換する．

$$\Lambda_{11}=\begin{bmatrix}-3.7496 & -4.1051\\4.1051 & -3.7496\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}a_{11\lambda_{11}} & a_{12\lambda_{11}}\\a_{21\lambda_{11}} & a_{A22\lambda_{11}}\end{bmatrix}\qquad(18)$$

$$\Lambda_{22}=\begin{bmatrix}-3.7496 & 4.1051\\-4.1051 & -3.7496\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}a_{11\lambda_{22}} & a_{12\lambda_{22}}\\a_{21\lambda_{22}} & a_{A22\lambda_{22}}\end{bmatrix}\qquad(19)$$

因みに，$\det(A_{diag})=\det(\Lambda_{11})=\det(\Lambda_{22})=30.9113>0$ であり安定であるが，$a_{21\lambda^{**}}$ は US，OS 車両においてはともに負クロスフィード（$a_{21\lambda^{**}}<0$）になるため，共役複素数の固有値はΛ_{22}に制限する必要がある．仮に，固有値をΛ_{11}とするとUSビークルは不安定零点を持つようになることから，非最小位相系となりビークルの実際の運動とは矛盾することからも，共益複素数の固有値はΛ_{22}に制限する必要がある．

なお実ビークルにおいては，$a_{21\lambda^{**}}$ は -1近傍であるが，ここでは可視化の原理を説明するために対角化した場合の固有値：-4.1051をそのまま使用している．

同様に，複素固有ベクトルも行列で表現してそれぞれ複素固有値の四次正方行列Λ，複素ベクトルの四次正方行列 V にまとめると式（20），（21）を得る．

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -3.7496 & -4.1051 & 0 & 0 \\ 4.1051 & -3.7496 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.7496 & 4.1051 \\ 0 & 0 & -4.1051 & -3.7496 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.9735 & 0 & 0.9735 & 0 \\ 0 & 0.9735 & 0 & 0.9735 \\ 0.0193 & -0.2279 & 0.0193 & 0.2279 \\ 0.2279 & 0.0193 & -0.2279 & 0.0193 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \quad (21)$$

式（20），（21）の 4 次正方行列Λ，V は複素 2 次正方行列をブロック行列とした合成行列と見做すことができる．

複素数固有値をΛ_{22}に制限したのに対応して固有ベクトルも V_{22}に制限する．

Λ_{22}，V_{22}は厳密には行列であるが便宜的にそれぞれ固有値，固有ベクトルと呼ぶ．

4 次正方行列を可視化することは不可能であるが，実際のビークルの挙動はΛ_{22}に対応させることができる V_{22}で擬似的に可視化できる．

3. 4　複素固有ベクトル図

式（21）の V_{22}により擬似的に描いた位相平面の状態軌道および，複素固有ベクトルを図 3 に示す．

（1）図 3（a）は，A 行列を NS（ニュートラルステア）に設定した状態軌道（図中 A_{NS}），NS の状態軌道に対して複素数の固有値を等価変換した行列（19）を適用した状態軌道 A_{US1}（Λ_{22}）および，A_{US1}に対する擬似固有ベクトル V_{22_US1}を示す．

（2）図 3（b）は，A 行列を NS に設定した状態軌道（図中 A_{NS}），表 1 のビークル諸元とした状態軌道 A_{US2}および，A_{US2}に対する擬似固有ベクトル V_{22_US2}を示す．

（3）図 3（c）は，図 3（a）の状態始点付近の拡大図を示す．

（4）図 3（d）は，図 3（b）の状態始点付近の拡大図を示す．

図から US ビークルの状態軌道について以下の知見を得ることができた．

・NS ビークルの状態軌道の固有ベクトル V_{NS} に一直線の焦点へ向かう（吸引される）．

・US ビークルの状態軌道は擬似固有ベクトルによって偏向されながら焦点へ向かう（吸引される）．

・図 3（a）より A_{US1}を有する US ビークルの擬似固有ベクトル V_{22_US1} は対角要素が「0, 0」，非対角要素が [0.7071, -0.7071] という歪対称行列（Skew symmetric matrix）であり回転（振動）成分のみに影響するため閉じた擬似固有ベクトル軌跡となる．

・図 3（b）より A_{US2}を有する US ビークルの擬似固有ベクトル V_{22_US2}は対角要素が [0.0193, 0.0193]，非対角要素が [0.2279, -0.2279] であり，非対角成分によって発散要素（正の decay 成分）が追加されるため，開いた渦状の固有ベクトル軌跡となる．

・図 3（c）より状態軌道の始点付近では擬似固有ベクトルが閉じた固有ベクトルの場合の US ビークルの状態軌道は回転（振動）成分の影響により左側（軌跡上から見て）へ偏向しながら擬似固有ベクトルの NS ビークルの状態軌道と擬似固有ベクトルの間を通過して焦点へ吸引される偏向軌跡となる．

・図 3（d）より状態軌道の始点付近では擬似固有ベクトルが開いた固有ベクトルの場合は，US ビークルの状態軌道は擬似固有ベクトルの負の decay 成分の影響により左側（軌跡上から見て）へ偏向しながら擬似固有ベクトルの外側へ一旦出た後，回転（振動）成分の影響により再び擬似固有ベクトルの内側へ入り焦点へ吸引される偏向軌跡となる．

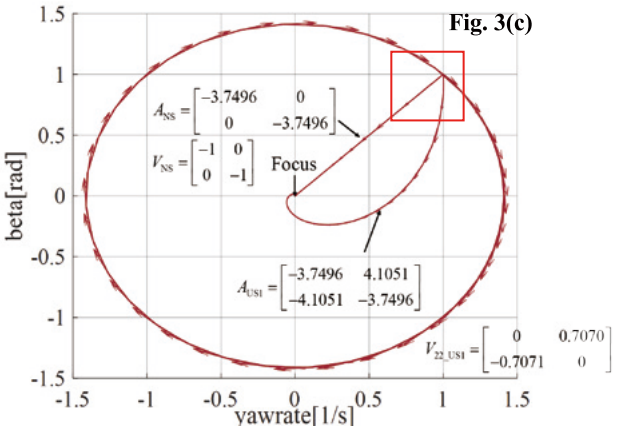

Fig.3（a） State trajectories and complex eigenvectors in the phase plane of the US vehicle.

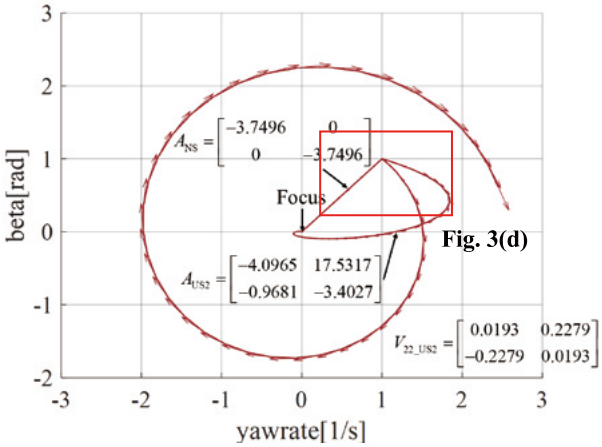

Fig.3（b） State trajectories and complex eigenvectors in the phase plane of the US vehicle.

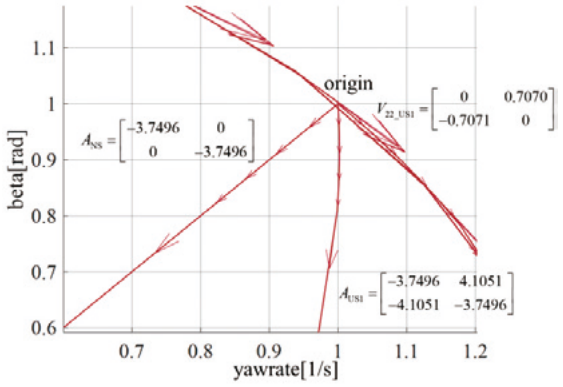

Fig.3（c） State trajectories and complex eigenvectors in the phase plane of the US vehicle.

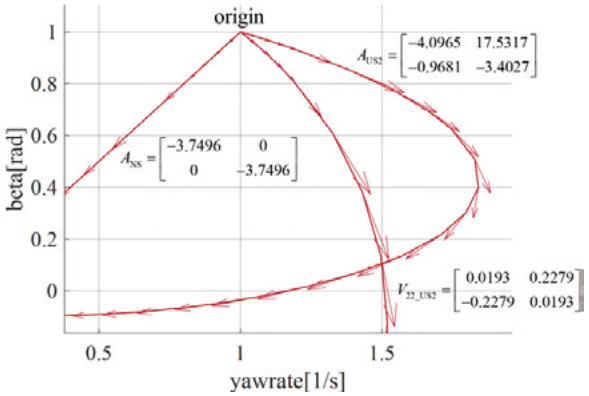

Fig.3（d） State trajectories and complex eigenvectors in the phase plane of the US vehicle.

5．結　言

US ビークルの複素固有ベクトルを擬似的に可視化して状態と固有値および，固有ベクトルの関係を明らかにすることができた．この知見を用いれば US の状態軌道を任意さらには，車両運動の見積りを初期段階において計画的に設定可能なことを示唆することができた．

・NS ビークルの状態軌道の固有ベクトル V_{NS} に一直線の焦点へ向かう（吸引される）．
・US ビークルの状態軌道は擬似固有ベクトルによって偏向されながら焦点へ向かう（吸引される）．
・A_{US1}を有する US ビークルの擬似固有ベクトル V_{22_US1}は歪（わい）対称行列（Skew symmetric matrix）であり回転（振動）成分のみに影響するため閉じた擬似固有ベクトル軌跡となる．
・A_{US2}を有する US ビークルの擬似固有ベクトル V_{22_US2}は非対角成分によって発散要素（正の decay 成分）が追加されるため，開いた渦状の固有ベクトル軌跡となる．
・A_{US1}を有する US ビークルの状態軌道は回転（振動）成分の影響により左側（軌跡上から見て）へ偏向しながら擬似固有ベクトルの NS ビークルの状態軌道と擬似固有ベクトルの間を通過して焦点へ吸引される偏向軌跡となる．
・A_{US2}を有する US ビークルの状態軌道は擬似固有ベクトルの負の decay 成分の影響により左側（軌跡上から見て）へ偏向しながら擬似固有ベクトルの外側へ一旦出た後，回転（振動）成分の影響により再び擬似固有ベクトルの内側へ入り焦点へ吸引される偏向軌跡となる．

謝　辞

今回のような MBD を適用した研究において MATLAB は必須であり，今後も MathWorks 社の MBD への貢献を期待する．

文　献

（1）菅沢深ほか：状態変数間の連成項に着目した操安性解析方法（第 1 報），日本機械学会論文集（C 編），Vol. 61,No.591，pp.186-187（1995）
（2）菅沢深，永井正夫，毛利宏：状態変数間の連成項に着目した操安性解析法（第 1 報），日本機械学会論文集（C 編），Vol.61,No.591，pp.188-189（1995）
（3）毛利宏，小山隆，湯原隆博，菅沢深：「等高線法」を用いた車両運動性能の解析（第 1 報），自動車技術会論文集，Vol.52.No.2，pp.456-461（2021）
（4）菅沢深：操安性におけるシステム行列の要素が操安性の応答特性に及ぼす影響の検討，自動車技術会学術講演会前刷集，No.62-98，pp.5-8（1998）
（5）菅沢深：操安性におけるシステム行列の要素が操安性の応答特性に及ぼす影響の検討（第 2 報），自動車技術会学術講演会前刷集，No.22-99，pp.5-8（1999）
（6）菅沢深：操安性における安定性評価法の新しい試み，自動車技術，Vol.50,No.11，pp.83-87（1996）