

慣性計測装置によるセルトの自発的跳躍測定

青山 直樹*・鬼追 一雅*

(令和 4 年10月20日受付)

Measurement of Self-induced Jumping of Celt using IMU

Naoki AOYAMA and Kazumasa KIOI

(Received Oct. 20, 2022)

Abstract

For experimental verification of self-induced jumping shown by Batista's simulation^[1], the authors have previously performed an analysis by using a high-speed camera. However, clear self-induced jumping couldn't be observed. Next, we aimed to detect self-induced jumping by measuring the acceleration in the direction perpendicular to a desktop surface using an inertial measurement unit (IMU) BWT901. We analyzed the time variation of the acceleration component a_z' perpendicular to a desktop surface under the assumption that the acceleration components due to roll, pitch, and spin are sufficiently smaller than the gravitational acceleration. As a result, signs of self-induced jumping could be observed although a clear jumping could not be detected. In this paper, we describe the details of the experimental results.

Key Words: self-induced jumping, celt, rattleback, IMU

1. はじめに

セルトはコマの一種で、Fig.1のように底面が楕円体の形状をしている。「ラトルバック」あるいは「ウォブルストーン」とも呼ばれる。机などの水平で滑らかな平面上で回転させるとガタガタと振動し、やがて逆方向に回転する。セルトは例えば最初 z 軸周りに時計回りに回転を与えると、しばらくして反転し、反時計回りの回転を開始す

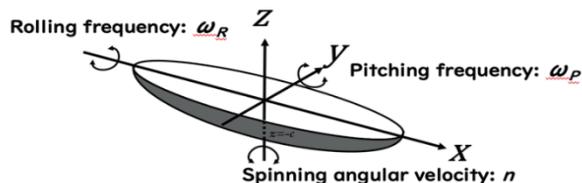


Fig.1. セルトの形状と回転軸

る。一見すると角運動量保存則を破っているかのように見える不思議な運動をする玩具である^[2]。

x 軸周りの回転をロール、 y 軸周りの回転をピッチ、 z 軸周りの回転をスピンと呼ぶ。また、セルト上部の楕円形に関して、長軸半径 a 、短軸半径 b と呼び、セルト高さを極軸半径 c とする。

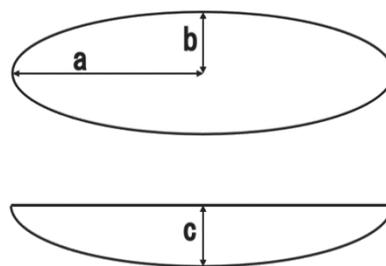


Fig.2. セルトの長軸半径 a 、短軸半径 b 、極軸半径 c .
上が平面図、下が正面図。

* 広島工業大学情報学部情報工学科

セルトのスピンの反転現象に関しては過去100年以上にわたって様々な研究がされてきた^[3]。これまでの研究によると、強反転方向からの反転トルクはピッチ振動、弱反転方向からの反転トルクはロール振動が不安定化することで生じることが知られている^[4]。セルトの反転のメカニズム自体は明らかになっているが、種々の条件に対する詳細な振舞いについては一部しか明らかになっていない。また実験的な検証はほとんどなされていない。

今回、我々は慣性計測装置 (IMU) BWT901を利用して机上面に垂直な加速度成分 a_z の時間変化を観測し、半楕円体型セルトの自発的跳躍現象の検出を試みた。その結果、自発的跳躍現象の兆候は観測できたが、明確な跳躍を捉えるには至らなかった。本稿ではその詳細を報告する。

2. 先行研究

Fig.3は Ljubljana 大学の Batista によって示された、回転楕円体における自発的跳躍現象のシミュレーション^[1] の例である。

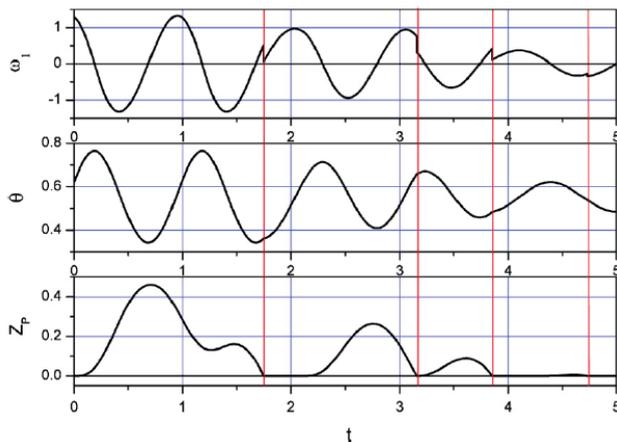


Fig.3. Batista による自発的跳躍のシミュレーション結果^[1]。

図中、上段の ω_1 はロール振動の角速度、中段の θ はピッチ振動の角度を示している。そして下段の z_b は机面から重心までの高さ距離 z_c と、回転楕円体の最下点から重心までの高さ h との差分を表している。すなわち下段の z_b の値が 0 の時には回転楕円体は机と接触しており、正の値を取るときには空中に浮いていることを表している。初期角速度は 1800rpm すなわち 30回転/秒を与えた場合のシミュレーション結果である。Fig.3において、最初のジャンプは時刻 1.746 まで空中に浮いており、最大 0.461 の高さまでジャンプしている。シミュレーションに用いた回転楕円体の主軸の長さは 30.2mm である。シミュレーションの基準単位から計算すると空中滞在時間は 71ms、最大ジャンプ高さは 7.49mm である。実際のセルトの初期回転角速度はシミュレーションよりも 1 桁以上小さく、このように大きな自発的跳躍は生じないと予測される。

筆者らは 2020 年にハイスピードカメラによる直接観察を試みた。観察には長時間の撮影が可能なデジモ製のハイスピードカメラを使用した。Fig.4 はフレームレート 750FPS で撮影した木製のセルトの映像の一部であるが、映像では明確な跳躍を捉えられなかった。



Fig.4. ハイスピードカメラによる直接観察例。明確な跳躍は捉えられなかった。

3. 慣性計測装置 BWT901 による実験

3.1 実験環境

今回我々は Witmotion 社製慣性計測装置 BWT901 を用いてセルトの自発的跳躍現象の観測を試みた。データ取得用ソフトウェアとしては Witmotion 社から提供されている MiniIMU (ver6.1.2) を使用した。セルトを回転させるステージとしてアクリル板を用いた。慣性計測装置 BWT901 は右手系の座標系が採用されている。加速度の最大値は $\pm 16G$ (精度 0.01G) で、 x 軸周りの角度と z 軸周りの角度は $\pm 180^\circ$ 、 y 軸周りの角度は $\pm 90^\circ$ (精度 0.01°) である。サンプリング周波数は 200Hz すなわちサンプリング間隔 5ms である。

3.2 慣性計測装置の取り付け

セルト上部に慣性計測装置を取り付ける為、Fig.5 のようにプラスチック製の六角ナットを 4 か所に接着剤で固定した。

BWT901 は自作ドータボードを介してリチウムポリマー電池 (40mAh) とコネクタで接続できるようにした。自作ドータボードと BWT901 マザーボードはピンヘッダで一体化し、プラスチック製ボルトでセルト本体に固定した。慣性計測装置全体の大きさは 25.6mm 角、質量はリチウムポリマー電池を含めて 7.64g である。



Fig.5. 支柱となる六角ナットを取り付けたアクリル製セルト

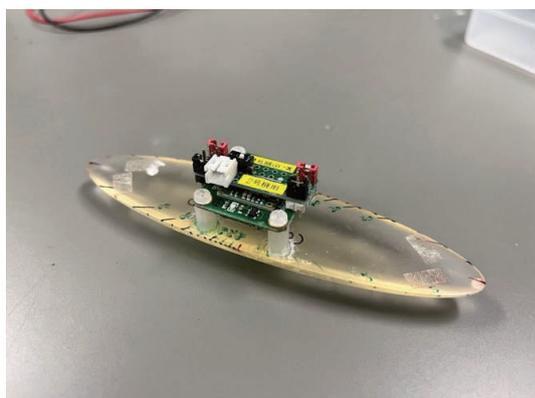


Fig.6. BWT901ボードと自作ドータボードをプラスチック製ボルトでセルトに固定した。

鉛製の重りはセルト上面の縁に両面テープで接着した。Fig.7に示すように2つの重りの中心点を結ぶ直線と形状主軸のなす角を重りねじれ角 ζ とする。

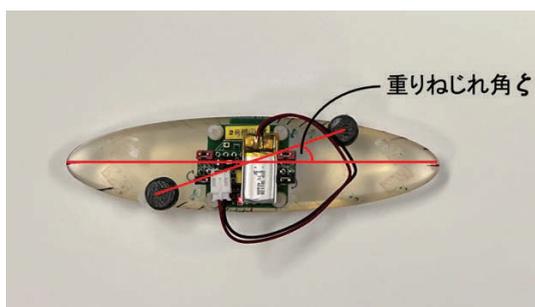


Fig.7. セルトの重りねじれ角 ζ

3.3 実験手順

実験では、セルト上部におもりを取り付けて手回しによりアクリル板上で回転させてデータを取得した。実験は形状の異なる4種類のセルトを用いた(試料名をD3, B2.5, B3, C4とした)。各セルトの形状パラメータ値をTable 1に示す。各セルトの極軸半径 c は全て10mmで同一である。質量はD3が19.93g, B2.5が30.70g, B3が24.75g, C4が22.88gである。

Table 1. 各セルトの形状パラメータ値

試料名	D3	B2.5	B3	C4
a (mm)	40	50	50	15
b (mm)	20	25	20	20
c (mm)	10	10	10	10
b/a	0.5	0.5	0.4	0.25
M (g)	19.93	30.70	24.75	22.88

またFig.8には各セルトの上面楕円形状とその楕円率 b/a を比較する図を示す。

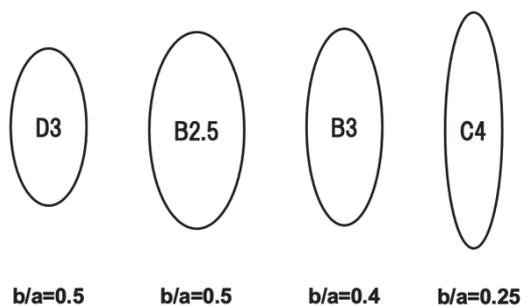


Fig.8. 各セルトの上面楕円形状とその楕円率 b/a

各セルトの重り径 Φ , 重りねじれ角 ζ を変えて実験を行った。重り径 $\Phi = 5, \Phi = 6, \Phi = 8, \Phi = 9, \Phi = 10$ の重りの質量はそれぞれ0.7g, 1.3g, 3.1g, 4.4g, 6.0gである。

実験条件をまとめると、

- (1) D3(40-20-10), $\phi = (5, 6, 8, 9, 10)$, $\zeta = (15, 20, 30)$, $b/a = 0.5$,
- (2) B2.5(50-25-10), $\phi = (5, 8, 9, 10)$, $\zeta = (15, 20, 30)$, $b/a = 0.5$,
- (3) B3(50-20-10), $\phi = (10)$, $\zeta = (15, 20, 30)$, $b/a = 0.4$,
- (4) C4(60-15-10), $\phi = (6, 8, 9, 10)$, $\zeta = (15, 20, 30)$, $b/a = 0.25$

Fig.9はアクリル板上に置いたセルトの様子である。手回しによって初期スピン回転を与えた。各条件について、上から見てアクリル板の中央, 左上, 左下, 右上, 右下の順番で計5回ずつ実験を行った。

測定データはBWT901とBluetooth接続されたPCにリアルタイムで送信され、MiniIMUによってtxtデータで記録される。txtデータには5ms毎に計測された x, y, z 軸の加速度, 角速度, 姿勢角が記録される。



Fig.9. アクリル板上のセルト

3.4 鉛直加速度成分 aZ の導出

BWT901の測定によって得られる姿勢角は、机に固定された O-XYZ 座標系とセルトに固定された O-xyz 座標系との間の ZYX オイラー角 (ϕ, θ, ψ) である。したがって BWT901の測定によって得られたセルト固定 O-xyz 座標系における加速度 $n = (ax, ay, az)^T$ から机回転座標 O-x'y'z' 座標系 (O-XYZ から Z 軸周りに ψ だけ回転した座標系) における加速度成分 $n' = (ax', ay', az')^T$ は次の式によって求めることができる。

$$n' = \begin{pmatrix} ax' \\ ay' \\ az' \end{pmatrix} = R_y^T(\theta)R_x^T(\phi) \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} ax\cos\theta + aysin\theta\sin\phi + aZ\sin\theta\cos\phi \\ aycos\phi - az\sin\phi \\ -ax\sin\theta + aycos\theta\sin\phi + azcos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \quad (3)$$

机回転座標系 O-x'y'z' の z' 軸は机固定座標系 O-XYZ の Z 軸と同じであるから、自発的の跳躍を測定するためには机面に垂直な方向の加速度成分 az' ($= aZ$) を算出すればよい。すなわち、

$$aZ = az' = -ax\sin\theta + aycos\theta\sin\phi + azcos\theta\cos\phi \quad (4)$$

を用いればよい。セルトが跳躍すると自由落下状態になるので、 $aZ = 0$ となる。

Fig.10から Fig.13に上面楕円率 b/a を変えた場合の加速度 aZ の時間変動を示す。いずれも重り径 $\Phi = 10\text{mm}$ 、重りねじれ角 $\zeta = 15^\circ$ の条件における測定結果である。Fig.10および Fig.11のセルトは両者とも上面の楕円率 $b/a = 0.5$ のサンプルである。Fig.12のセルトは上面の楕円率 $b/a = 0.4$ 、Fig.13のセルトは上面の楕円率 $b/a = 0.25$ のサンプルであり、Fig.11と Fig.12に比べて上面の楕円率が小さい。

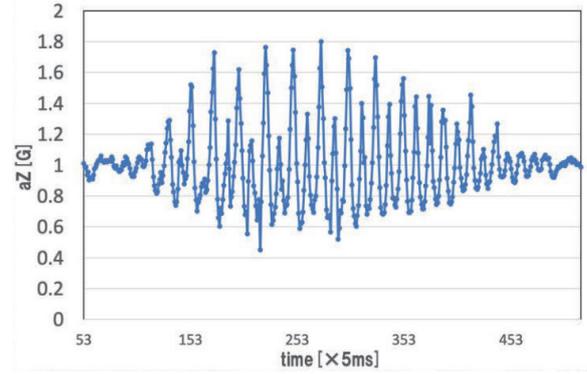


Fig.10. 加速度 aZ の時間変化. D3(40-20-10) $\Phi = 10$, $\zeta = 15^\circ$, $b/a = 0.5$

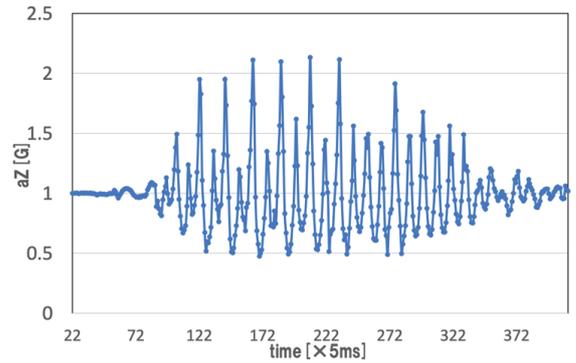


Fig.11. 加速度 aZ の時間変化. B2.5(50-25-10) $\Phi = 10$, $\zeta = 15^\circ$, $b/a = 0.5$

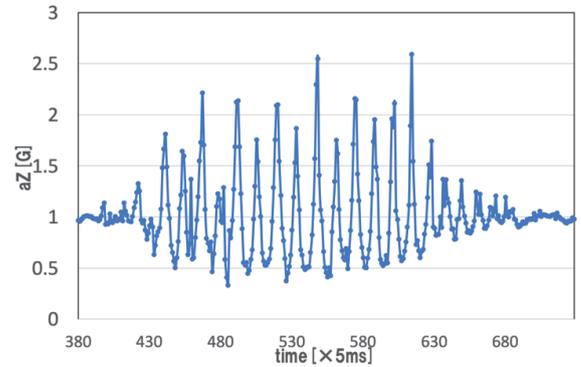


Fig.12. 加速度 aZ の時間変化. B3(50-20-10) $\Phi = 10$, $\zeta = 15^\circ$, $b/a = 0.4$

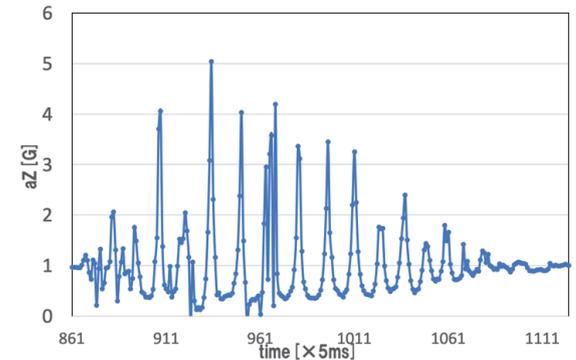


Fig.13. 加速度 aZ の時間変化. C4(15-20-10) $\Phi = 10$, $\zeta = 15^\circ$, $b/a = 0.25$

4. 考察

Fig.10から Fig.13を見ると、最も楕円率の小さな Fig.13では $aZ \approx 0$ の箇所が見られる。これまでの実験により楕円率が小さいほど、強反転方向からの反転力が強くなることがわかっている^[5]。この実験結果から、反転力が強いセルトの方が自発的跳躍を生じやすいことが分かる。サンプリング間隔 5 ms では自発的跳躍の兆候が見られるが、明確に跳躍している箇所は見出せなかった。1 mm 程度の跳躍なら 5 ms のサンプリングでも観測可能なはずであるから、跳躍していたとしても 0.1mm 程度の僅かな跳躍であると推定できる。

セルトはロール振動とピッチ振動が不安定化したときにガタガタと音を発する。この音がラトル（ガラガラ）バックという名の由来であるが、この音はセルトがジャンプした後に机に衝突するときの衝突音だと考えられてきた^[6]。しかし我々のハイスピードカメラによる観測や、今回の慣性計測装置による観測においても明確な跳躍現象は観測されなかった。全く跳躍していない場合の方が多いが、それでもガタガタ音を発していることから、この音は跳躍の落下時に机面に衝突する音ではないことが推測できる。

この BWT901 はサンプリング間隔 5 ms が最小であるので、自発的跳躍を観測するためには、より高性能のセンサを導入するか、より高い跳躍をする条件を探索する必要がある。また本解析では、ロール、ピッチ、並びにスピンによる加速度成分が重力加速度に比べて十分小さいことを仮定している。今後は、ロール、ピッチ、並びにスピンによる加速度成分を考慮した解析を進めることも必要である。

5. まとめ

今回、我々は慣性計測装置 BWT901 を利用して机上面に垂直な加速度成分 aZ の時間変化を観測し、半楕円体型セルトの自発的跳躍現象の検出を試みた。その結果、自発的跳躍現象の兆候は観測できたが、明確な跳躍を捉えるには至らなかった。今後は明確な跳躍現象を観測できるように改善しなければならない。

文 献

- [1] M. Batista, "Self-induced jumping of a rigid body of revolution on a smooth horizontal surface," *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol.43, pp.26-35, 2008.
- [2] J. Walker, "The mysterious "rattleback": a stone that spins in one direction and then reverses," *Scientific American*, pp.172-184, Oct. 1979.
- [3] G. T. Walker, "On a Curious Dynamical Property of Celts," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol.8, pt.5 (1895) pp.305-306.
- [4] H. Moffatt and T. Tokieda, "Celt Reversals: A Prototype of Chiral Dynamics," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2008, vol.138, no.2, pp.361-368.
- [5] 鬼追, 半楕円体型セルトの主曲率とスピン反転回数に関する実験的特性, 可視化情報学会論文集, Vol.40, No. 3, pp. 1-8, 2020年3月.
- [6] 小川陽弘, 大島裕子, セルトの研究, 可視化情報, Vol.19, No.74, pp.15-20, 1999.