

# セルトのスピンの反転とカイラルやじろべえ

鬼追 一雅\*

(平成30年11月1日受付)

## On the spin reversal of the celt and the “chiral balancing toy”

Kazumasa KIOI

(Received Nov. 1, 2018)

### Abstract

The celt or rattleback, sometimes called wobblestone, has a semi-spheroidal rigid body with asymmetric mass distribution. When it is rotated on a horizontal smooth surface such as a table, it “rattles” and eventually rotates in the opposite direction. It is a toy that makes a strange motion that seems to be breaking a law of conservation of angular momentum. In this paper, we look back on the history of research on the spin reversal mechanism of the celt and consider the chirality causing spin reversal. Finally, a spin reversal phenomenon of the “chiral balancing toy” has been introduced as a novel open question.

**Key Words:** celt, rattleback, wobblestone, spin reversal, chiral dynamics, chiral balancing toy, open question

### 1. はじめに

セルト (celt) はコマの一種で、図1のような慣性主軸に対して底面が非対称な形状のものと、図3のような回転楕円体の底面を持ち慣性主軸に対して非対称に重りを載せたものとの2通りの作り方がある。いずれの場合も慣性主軸と形状主軸がずれている。ラトルバック (rattleback) あるいはウォブルストーン (wobblestone) とも呼ばれる。机などの水平で滑らかな平面上で回転させるとガタガタと振動し、やがて逆方向に回転する。一見すると角運動量保存則を破っているかのように見える不思議な運動をする玩具である。最初に考古学者が古代の遺跡から見つけ、石斧を意味するセルトと名付けた [1]。しばしばケルト人 (Celt) と混同されるが発音が異なり、全く別の言葉である。セルトは元来は考古学用語である。一般向けの日本語解説としては物理学者の戸田盛和が「おもちゃの科学」という書籍 [2] の中において“あっち回りが好きな石”という見出しで紹介している。

本稿ではセルトのスピンの反転機構に関する研究の歴史を振り返ると共に、スピンの反転をもたらしカイラリティについて考察を行う。最後に関連現象として“カイラルやじろべえ”のスピンの反転現象を紹介する。

### 2. セルト研究の歴史

回転運動は一般的に複雑であり、コマの回転のように滑らかな運動でない限り数理的解析は容易でない [2]。セルトは単純な構造ではあるが、その運動は単純な回転運動から少しだけ外れた運動をするので、解析対象として興味深い。セルトに関する最初の科学的な研究は100年以上前に G. T. Walker によって発表されている [3] [4]。定性的な振る舞いを記述してはいるが、物理的な根拠は希薄であり、その後の研究においてもセルトの奇妙な振舞いは厳密に解明されることなく、永らく未解決問題であった。定性的な振舞いに関しては J. Walker による1979年の論文が詳しい [1]。また1986年には定常宇宙論で高名な Bondi が数理的な解析を行った [5] がやはり物理的な根拠は希薄であった。

\* 広島工業大学情報学部情報工学科

セルトは負回転では反転しないかのような説明がなされることがあるが、それは間違いである。大きな自励振動が生じるなら両方向に反転することは既に G. T. Walker が指摘している [3]。

関連する現象として、ゆで卵の立上り現象や日本の逆立ちゴマ (tippe top) の振舞いがある。逆立ちゴマの力学に関しては1952年の Braams [6] および Hugenholtz [7] によって解決された。重心のずれた球形物体の回転運動においてジェレット定数と呼ばれる運動定数が存在することが見いだされたことによって解決されたのである。回転するゆで卵の立上り現象については2002年に Moffatt と下村によって最終的な解決を見た [8]。これはジャイロスコピック近似と名付けられた方法により、任意の軸対称物体に対してジェレット定数が保存することを発見したことが解決に至った大きな要因である。また下村らは回転するゆで卵が自発的にジャンプすることを理論的に導出し [9]、実験でも確認した [10]。下村らの解析では滑り摩擦を仮定していたのに対して、Batista は回転楕円体の動作のごく初期においては摩擦がなくても自発的ジャンプが生じうることを見出した [11]。

これらの成果を踏まえてセルトの振舞いに関する理解が近年になって大きく前進した。Moffatt と時枝 [12] は Markeev [13] と Pascal [14] が導入した3次の非線形動力学系を用いてカイラル反転を記述し、散逸パラメータを調整することによって任意の回数のスピン反転が可能であることを示した。すなわち原理的には無限回のスピン反転が可能であることになる。Moffatt らによって再構築されたセルトのモデル方程式は、地磁気の反転を説明するモデルとしても使えるという [15]。

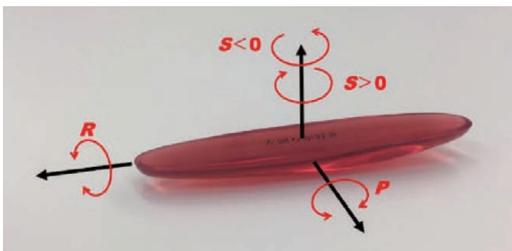


図1 セルトの3つのモード：ピッチ (P)、ロール (R)、スピン (S)。スピン方向が反転する。垂直方向の軸はヨー (yaw) 軸と呼ばれる場合もある。慣性主軸に対して底面が非対称な形状をしている。

Moffatt らとは独立に2008年、Zhuravlev と Klimov はセルトについての包括的な理論を提案した [16]。それまでの研究では、セルトの机との接点における速度が0といった単純化した仮定を含んでいたが、彼らの研究は乾燥摩擦と接触面積に依存する効果を含んでいる。

最近ではセルトを利用したエネルギーハーベスティング

や振動センサの研究 [17] もなされている。セルトの力学はいわゆる非ホロノミック系であり、掘削抗の底におけるドリルビットの動作解析の研究にも影響を与えている [18]。また、セルトが自発的にジャンプすることは以前から指摘されており [19]、回転卵における下村や Batista の解析はセルトにも適用できると考えられる。

### 3. セルトのスピン反転現象

#### 3.1. スピン反転と摩擦力

セルトの奇妙な振舞いについては永らく摩擦力が重要な役割を担っていると考えられてきた [2]。しかし Moffatt ら [12] によると、セルトの反転機構にとって散逸 (つまり滑り摩擦) の存在は本質的ではなく、滑り摩擦が無視できる場合には無限回のスピン反転が可能である。“滑り摩擦が無視できる場合” というのは滑り摩擦によるエネルギー散逸が0に近いことを要請しているのであって、必ずしも静止摩擦係数が大きいことを要請しているのではない。そういう意味では「摩擦係数が大きければ、滑らない状況に近くなるので、反転回数は大きくなるはずである」という説明 [20] は現実的ではないだろう。

G. T. Walker は形状主軸 (長径) と慣性主軸のずれが  $6^\circ$  の場合にはピッチング振動とローリング振動のいずれに対しても不安定であり、停止するまでに3回反転したと記している [3]。現時点においても公開されているデータとして確認できる最大反転回数はせいぜい4回である [24]。J. Walker によると、“ラトルバック” という名称の名付け親でもあるミシガン大学の Moore が作った半卵型のセルトは15回以上反転した記録を出したが、その後は再現できなくなってしまった [1]。原因はよく分からないという。十分に条件を整えることが出来れば反転回数を増加させることが出来ると考えられる。スプーンのような非対称な底面形状の方が振動は生じやすく [19]、3回反転の様子を公開している Ucke [21] と4回反転の様子を公開している Youd [24] もスプーンの柄を曲げて作製している。

#### 3.2. カイラリティ

セルトは図2に示すように、その形状はカイラリティ

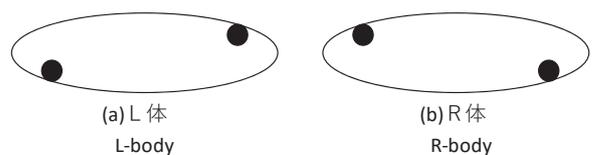


図2 セルトの形状はカイラリティを有している。黒丸は重りの位置を示す。(a) L体と (b) R体は互いに鏡像体の関係にある。L体は左回転、R体は右回転が弱反転方向 (負回転方向) になる。大半のセルトにおいて、弱反転方向に回した場合 (負回転) には振動の発展よりも回転の減衰の方が早いので反転しない。

(対掌性)を有している。即ち、互いに鏡像体<sup>†</sup>の関係にある (a) のL体と (b) のR体は回転と並進だけでは重ね合わせることができない。剛体の運動は、その鏡像の運動と一致するのでL体とR体はそれ自体の運動はカイラリティを示さないが、「剛体+机」系の運動は重力の存在によってカイラリティを示すことになる。

以下 Moffatt と時枝 [12] によるセルトのモデル式およびカイラリティの影響について簡単に紹介する。

楕円体  $(X/a)^2 + (Y/b)^2 + (Z/c)^2 = 1$  の運動を考える。座標系は図3に示すようにZ軸上向きを正とする右手系とする。滑りが無いと仮定すると移動する接点Pの座標  $x(t)$  と  $y(t)$  には二つの独立した振動モード、ピッチング  $(x,y) = (1,0)e^{-i\omega_p t}$  とローリング  $(x,y) = (0,1)e^{-i\omega_R t}$  が存在する。楕円体がz軸周りに回転するとこれら2つのモードは結合するが安定したままである。

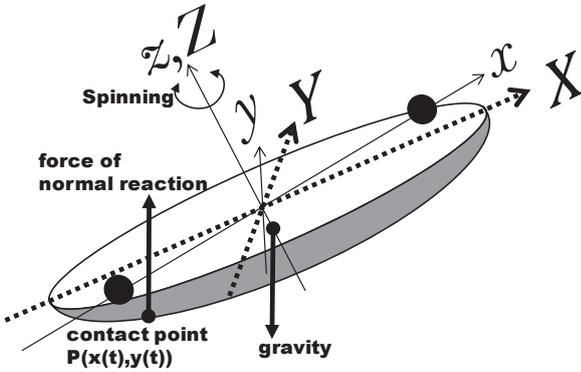


図3 右手系座標系。X, Y, Zはセルトの形状主軸 (=幾何学的形状の主軸)であり、x, y, zは慣性主軸である。黒丸は重りを表す。セルトの底面と机は点Pで接触している。Z(z)軸は省略されている。

楕円体の形状主軸に対してZ軸周りに少しでも回転させた慣性主軸をxとする座標系xyzを使うと接点P付近のセルトの表面は局所的に、

$$z = -1 + \frac{x^2}{2a^2} + \chi \frac{xy}{a^2} + \frac{y^2}{2b^2}$$

で表される。ここで  $\chi$  はカイラリティ・パラメータで、正または負の小さな値を持つ。摩擦によるエネルギー散逸を無視できる場合には、セルトの力学的振舞いは

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} A \\ B \\ N \end{pmatrix} = \text{sgn} \chi \begin{pmatrix} B \\ \lambda A \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A \\ B \\ N \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書ける<sup>‡</sup>。ここで  $\omega_p$  をピッチング振動の周波数、 $\omega_R$  をローリング振動の周波数とすると、 $\lambda = (\omega_p/\omega_R)^2$  である。またz軸周りの角速度  $(0,0,n)$  に対して  $N = 5(1 + 6b^2)n$  である。 $A = 5(1 + 6b^2)\sqrt{\beta/\gamma}A_0$  と  $B = 5(1 + 6b^2)\sqrt{\alpha/\gamma}B_0$  はそれぞれピッチング振幅  $A_0(t)$  とローリング振幅  $B_0(t)$  を変形

した値である。 $\alpha, \beta, \gamma$  はロール、ピッチ、スピンの回転のエネルギーを結びつける係数で、 $\beta\omega_p^2 A_0^2 + \alpha\omega_R^2 B_0^2 + \gamma n^2 = 2E$  の関係がある。 $E$  は全エネルギーである。

ここで  $\chi > 0$  を仮定する。強反転方向のピッチングモードでは振幅  $A$  は  $N = 0$  のときに励起されて  $dN/d\tau < 0$  となる。すなわちセルトは負のスピンを開始する。弱反転方向のローリングモードの場合は振幅  $B$  が励起され  $dN/d\tau > 0$  となりセルトは正のスピンを始める。しかし、 $\lambda > 1$  なので角加速度は小さい。時間尺度が遅い場合の3次元力学系の振舞いは式(1)によって完全に記述される。

### 3.3. 摩擦力と反転モーメント

すべり摩擦のある場合には式(1)は次のように拡張される。

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} A \\ B \\ N \end{pmatrix} = \text{sgn} \chi \begin{pmatrix} B \\ \lambda A \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A \\ B \\ N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1 A \\ \mu_2 B \\ \mu_3 N \end{pmatrix} \quad (2)$$

式(2)において散逸パラメータ  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  を調整することにより、エネルギーが0になるまでの任意の反転回数を実現できる。式(1)および式(2)はMarkev [13] とPaskal [14] が導出したスカラー形式の式から、Moffattら[12]によって導出されたベクトル形式のセルト反転メカニズムを表す式である。

既に述べた通り、セルトの反転機構については永らく摩擦力が重要な役割を担っているという誤った説明がなされてきた[2]。摩擦力は回転速度を落とす効果はあっても、スピンの反転に直接寄与する力とはなり得ないはずである。Moffattら[12]はこの点について「セルトの反転機構にとって散逸(つまり滑り摩擦)の存在は本質的ではない」と明確に否定した。摩擦はあくまでも回転速度を落とすだけであってスピン反転には寄与しない。多くのセルトでは、弱反転方向に回転した場合には摩擦による回転の減衰がローリング振動の発展よりも早いのでスピン反転に至らないのである。スピン反転の本質はカイラリティにあり、その運動が非ホロノミック系であるということだ。

例えば小川ら[19]は、「セルト底面と机面との接点が慣性主軸上にないことから、振動中のセルトに机面から働く垂直抗力は慣性主軸周りの回転モーメントを発生させる。」と説明している。それにもかかわらず、スピン回転運動から振動(ピッチングとローリング)へのエネルギーの移動のきっかけとなるのが摩擦であると結論付けており、説明に矛盾がある。

また村上[22]は「ローリングによって接点は上から見て反時計方向に転がる。そのときの摩擦トルクが順方向の回転トルクになる。」という説明をしている。これは弱反転

方向（負回転）では逆転しないという前提での説明であり、実際のセルトが弱反転方向（負回転）から強反転方向（正回転）へもスピン反転を起こすことと矛盾する。

### 3.4. セルトの形状とスピン反転条件

Moffatt らによるとセルトの反転は (1) 強反転方向（正回転）に回転, (2) ピッチング振動の発展 = スピン逆（負回転）モーメントの発生, (3) スピン反転 = 弱反転方向（負回転）に回転, (4) ローリング振動の発展 = スピン逆（正回転）モーメントの発生, (5) スピン反転 = 強反転方向（正回転）に回転, という経過を繰り返す [12].

一方, Zhuravlev らは楕円体の表面を

$$\frac{(-x \cos d + y \sin d)^2}{a^2} + \frac{(x \sin d + y \cos d)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (3)$$

と表して, 運動座標系を慣性主軸に合わせて解析を行った。Zhuravlev らのシミュレーションによるスピン反転の様子を見ると, 強反転方向（正回転）から弱反転方向（負回転）へのスピン反転においてはピッチング振動の発展が支配的ではあるが, 弱反転方向（負回転）から強反転方向（正回転）へのスピン反転においては, 必ずしもローリング振動の発展が支配的とは言えない。

Moffatt らの結果においてはピッチング振動とローリング振動のいずれか一方のみの振幅が発展しているのに対して, Zhuravlev らの結果では, 正から負, 負から正のいずれの反転においてもピッチング振動とローリング振動の両方が発展している。これは Moffatt らが局所的な近似であるのに加えて, 長径  $a$  と短径  $b$  について  $a \gg b$  という条件を与えていることが影響していると考えられる。

これらの事柄は R 体か L 体だけでなく長径/短径の比によっても強反転方向が変わり得る可能性を示唆している。そこでセルトの長径  $a$  と短径  $b$  との比率と反転条件について考える。セルトの長径  $a$  と短径  $b$  とが等しい場合は慣性主軸と形状主軸が常に一致する。スプーンを利用したセルト [21] は  $a \approx b$  に近い形状をしており Zhuravlev らの条件 ( $b/a \approx 0.229$ ) に近い。スプーンのように非対称な形状の方が反転回数が多くなりやすいという指摘があるが [20], Zhuravlev らの結果を見ると非対称であることよりもむしろ  $a \approx b$  に近い形状であることが反転回数の増加に寄与する可能性がある。筆者の予備的な実験では, 実際にそのような傾向が観察された。上面の楕円率  $b/a = 0.4$  のセルトでは再現性良く 6 回反転させることができた。

セルトの XY 断面の楕円率  $b/a$  とスピン反転条件並びに YZ 断面の楕円率  $c/b$  とスピン反転条件について詳細に検討した報告例は今のところ見つかっていない。今後の検討が望まれる。

### 3.5. セルトの重心位置とカイラルやじろべえ

ところでセルトは机上において安定した平衡状態で静止可能である。これは接触点 P における垂直抗力よりも重心を通る鉛直線の方が回転楕円面の内側にあるので回転のモーメントが復元力として働くからである。図 4 のようにセルトを構成する重りが上方に突き出しているような形状をしている場合には重心の位置が高くなる。重心を通る鉛直線が接点 P よりも外側になると重力と垂直抗力による回転のモーメントは復元力とはならず, セルトは横倒しになってしまう。

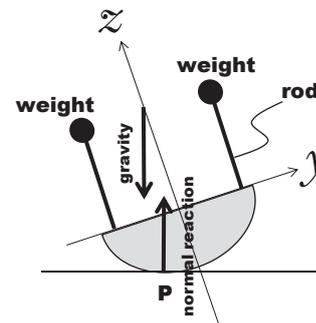


図 4 セルトの安定性。重心位置が上がって重心を通る鉛直線が接点 P よりも外側になると横倒しになる。

逆に重りの位置が低く, 重心が底面の回転楕円面より低くなった場合はどうだろうか。図 5 にそのような例を示す。この構造はやじろべえの支点部分をセルトに置き換えたことに他ならない。このようなやじろべえ型のセルトをカイラルやじろべえと名付ける。

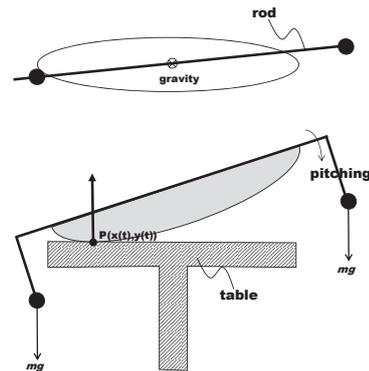


図 5 重りの位置を低くしたやじろべえ型のセルト。上は上面図。下は側面図。重心を低くするとピッチング周期は長くなる。やじろべえの支点をセルトに置き換えたのと等価である。

筆者の簡易的な実験では, このような構成にしてセルトの重心位置を下げられたセルトは, スピン反転し難くなったり, 強反転方向が逆 (R 体であるのに右回転が強反転方向に) になったりする場合がある。これまでにこのような現象の報告例はなく, 現象自体の詳しい調査が必要である。

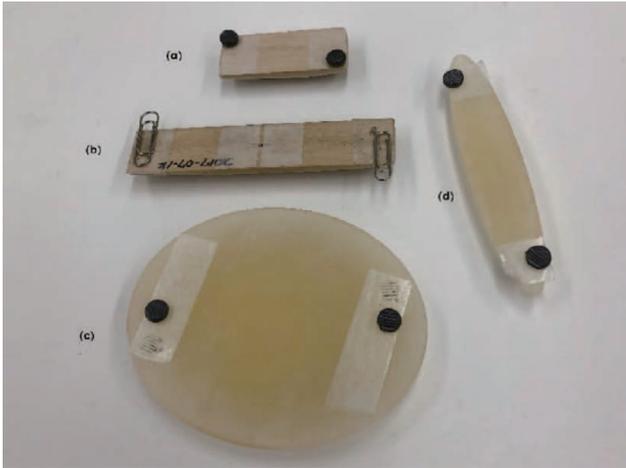


図6 筆者の自作セルト。(a)と(b)は木製、(c)と(d)はアクリル樹脂製。底面を紙やすりなどで磨いて適当な重りを付けると、簡単にスピン反転するようになる。

今のところ正確なメカニズムは不明である。カイラルやじろべえは振動周波数が低くなる。このことから実験的観察には向いていると考えられる。

図6は筆者の自作セルトの一例である。セルトの作製は意外に簡単で、適当な形状でも慣性主軸をずらすとスピン反転するようになる。しかし実験しようとするとも再現性に乏しく、正確なデータを得るためにはそれなりの仕掛けが必要になる。上記のような実験はあくまで簡易的であり、定性的な特性を示せても定量的な再現性に欠ける。近年、3Dプリンタの普及により、安価に正確な形状のサンプルを作製できるようになった。図6のアクリル製セルトは3Dプリンタで作製したものである。現在、この他にも様々な形状のセルトを作製し実験的検証を進めている。

### 3.6. セルトの自発的ジャンプ

既に述べたようにセルトが自発的にジャンプすることは以前から指摘されている。ラトルバックという名称は「ガタガタと音を立てる」という意味が語源である。セルトの運動を観察していると、このガタガタ音はセルトが自発的にジャンプをして机に落下した時の衝撃音であるように見える。しかしながら、このガタガタ音がジャンプしたときの衝撃音であることが実験データとして示されたことはない。前節のようにして重心位置を下げるとピッチング振動は周波数が低くなりガタガタ音は出にくくなる。

村はピッチング振動における接点での抗力と摩擦力をインパルス＝打撃力に近いとして考察を行った [22]。すなわち強反転方向（正回転方向）におけるガタガタ音が落下時の衝撃音であるとした考察である。

一方、回転卵の立上り現象における卵の自発的ジャンプについては下村ら [9] が理論的に導出するまでは現象の存在が知られていなかった。実験的検証 [10] を経て初めて

確認されたのである。Moffatt ら [12] および Zhuravlev ら [16] のセルトの運動解析においては自発的ジャンプについての言及はない。シミュレーション結果を見てもジャンプはしていないように見える。セルトの運動を観察していると長径  $2a$  ≒ 短径  $2b$  に近づくほどガタガタ音が激しくなる。このことから回転卵の自発的ジャンプと同じメカニズムである可能性が高い。回転卵の自発的ジャンプ理論のセルトへの適用および実験的検証が望まれる。また接触点の移動軌跡を追跡することによって反転モーメントとジャンプの様子を直感的に知ることができるのではないかと考えられる。

## 4. カイラルやじろべえの振舞い

短径  $b \equiv 0$  の構造を持ったカイラルやじろべえを作製する。もはやセルトの形状をしていない。これは上から見て慣性主軸が形状主軸からずれたやじろべえである。このカイラルやじろべえは  $z$  軸まわりの角運動量に変化し、やはりスピン反転する。

その動作にセルトほどの不思議さを感じないのは、カイラルやじろべえの縦方向の振動（＝ピッチング振動）の振幅が大きくて、かつ周波数が低いことが原因と考えられる。ピッチング振動の周波数が低く、もはやジャンプすることはないのでセルトのようにガタガタ音を発生しない。セルトの強反転方向の運動は、回転運動→ピッチング振動の発展→逆回転という運動変化が生じるが、このカイラルやじろべえでは、回転+ピッチング振動→逆回転+ピッチング振動という運動変化が観察される。

短径  $b \equiv 0$  のカイラルやじろべえは曲線状の底面を持つタイプのセルトを支点に持つやじろべえであるとも考えられる。更に  $a = b \equiv 0$  の場合のカイラルやじろべえを考える。この場合はほぼ点接触となり接触点の移動がほぼ0である。長径と短径が共にほぼ0即ち  $a = b \equiv 0$  の場合にはスピン反転しないことが予測されるが、実際にはむしろスピン反転を繰り返す。筆者が試しに作製した図7のカイラルやじろべえはスピン反転を32回繰り返した。点接触と考え



図7  $a = b \equiv 0$  のカイラルやじろべえの例。このカイラルやじろべえはスピン反転32回を記録した。

るのが間違いであり,  $a = b \ll 1$  の小さな球面もしくは回転楕円面と考えるべきなのかもしれない。今後の解析課題である。

このカイラルやじろべえはスピン回転の角速度が遅い上に1回転未満で反転する。しかも振幅の大きなピッチング振動を伴う。常にピッチング振幅が大きく振動数は回転運動の方がはるかに遅いため, 風にゆらゆらと揺られて回転しているように見える。カイラルやじろべえは自発的ジャンプをすることはない。このことはピッチング振動の周波数と密接な関係があると推測される。

## 5. おわりに

セルトのスピン反転機構に関する研究の歴史を振り返ると共に, スピン反転をもたらすカイラリティについて考察を行った。またカイラリティの考察を踏まえ, 新たな未解決課題として“カイラルやじろべえ”のスピン反転現象を紹介した。

今後の課題として,

- ・セルトの自発的ジャンプのメカニズム
- ・セルトのXY断面の楕円率  $b/a$  並びにYZ断面の楕円率  $c/b$  とスピン反転性能
- ・セルトの重心高さ とスピン反転性能
- ・セルトの机との接触点の移動軌跡
- ・カイラルやじろべえのスピン反転現象の運動

など興味深い話題が尽きない。

## 文 献<sup>§</sup>

- [1] J. Walker, “The mysterious “rattleback”: a stone that spins in one direction and then reverses,” *Scientific American*, pp. 172–184, 1979.
- [2] 戸田盛和, おもちゃの科学 (6), 東京: 日本評論社, 1995.
- [3] G. T. Walker, “On a curious Dynamical Property of Celts,” *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 第 巻8, 第 PT.5, pp. 305–306, 1895.
- [4] G. T. Walker, “On a dynamical top,” *The quarterly journal of pure and applied mathematics*, vol. 28, pp. 175–184, 1896.
- [5] H. Bondi, “The rigid body dynamics of unidirectional spin,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 405, pp. 265–274, 1986.
- [6] C. M. Braams, “On the influence of friction on the motion of a top,” *Physica*, vol. 18, no. 8–9, pp. 503–514, 1952.
- [7] N. M. Hugenholtz, “On tops rising by friction,” *Physica*, vol. 18, no. 8–9, pp. 515–527, 1952.
- [8] H. K. Moffatt and Y. Shimomura, “Spinning eggs - a paradox resolved,” *Nature*, vol. 416, no. 6879, pp. 385–386, 2002.
- [9] Y. Shimomura, M. Branicki and H. K. Moffatt, “Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. II Self-induced jumping,” *Proc. R. Soc. A*, vol. 461, no. 2058, pp. 1753–1774, 2005.
- [10] T. Mitsui, K. Aihara, C. Terayama, H. Kobayashi and Y. Shimomura, “Can a spinning egg really jump?,” *Proc. R. Soc. A*, vol. 462, no. 2074, pp. 2897–2905, 2006.
- [11] M. Batista, “Self-induced jumping of a rigid body of revolution on a smooth horizontal surface,” *Int. J. Non-linear Mechanics*, vol. 19, no. 74, pp. 15–20, 1999.
- [12] H. K. Moffatt and T. Tokieda, “Celt revarsals: a prototype of chiral dynamics,” *Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A*, vol. 138, no. 2, pp. 361–368, 2008.
- [13] A. P. Markeev, “On the dynamics of a solid on an absolutely rough plane,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 47, no. 4, pp. 473–478, 1984. Translated from Prikl. Matem. Mekhan., vol. 47, no. 4, pp. 575–582, 1983.
- [14] M. Pascal, “Asymptotic solution of the equations of motion for a celtic stone,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 47, no. 2, pp. 269–276, 1984. Translated from Prikl. Matem. Mekhan., vol. 47, no. 2, pp. 321–329, 1983.
- [15] 吉田善章, 時枝正, “Celt (rattleback) のスピン反転運動,” *日本物理学会第70回年次大会概要集*, p. 3140, 21–24 Mar. 2015.
- [16] V. P. Zhuravlev and D. M. Klimov, “Global Motion of the Celt,” *Mechanics of Solids*, vol. 43, no. Issue 3, pp. 320–327, June 2008.
- [17] A. Nanda, P. Singla and M. A. Karami, “Energy harvesting using rattleback: Theoretical analysis and simulations of spin resonance,” *Journal of Sound and Vibration*, 第 巻369, pp. 195–208, 12 May 2016.
- [18] N. M. Musa, V. I. Gulyayev, L. V. Shevchuk and H. Aldabas, “Whirl Interaction of a Drill Bit with the Bore-Hole Bottom,” *Modern Mechanical Engineering*, 第 巻 Vol. 5, pp. 41–60, 10 July 2015.
- [19] 小川陽弘 and 裕. 大島, “セルトの研究,” *可視化情報*, vol. 19, no. 74, pp. 15–20, 1999.
- [20] 高野浩志, “滑る場合における viscous 摩擦によるラトルバック反転運動の解析,” *素粒子論研究・電子版*, vol. 7, 2011.
- [21] C. Ucke, “celt, rattleback, wobblestone - multiple spin

reversal," [Online]. Available: [http://www.youtube.com/watch?v=0\\_145zVizxM](http://www.youtube.com/watch?v=0_145zVizxM). [Accessed 14 July 2017].

D. Youd, "Rattleback spoon," [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=tUi9he2KTe8> [Accessed 11 Nov 2018].

[22] 村上力, "玩具 'ラトルバック (rattleback)' の奇妙な挙動の直感的説明," 日本機械学会第10回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集, pp. 39-42, Aug 2007.

[23] Z. Yoshida, T. Tokieda and P. J. Morrison, "Rattleback: A model of how geometric singularity induces dynamic chirality," *Physics Letters A*, vol. 381, no. 34, pp. 2772-2777, 12 Sep 2017.

[24] D. Youd, "Rattleback spoon," [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=tUi9he2KTe8> [Accessed 11 Nov 2018].

## 注

† 鏡像体：右手と左手のように，その物体の鏡像と重ね合わせることができない性質をカイラリティあるいは漢語で対掌性という。化学の世界ではキラリティーと呼ぶことが多い。セルトの R 体と L 体は互いに鏡像体である。

‡ ここで  $a \wedge b$  はウェッジ積 (Wedge product) であり行ベクトル  $a, b$  に対して直積  $\otimes$  を用いて,  $a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a = ab^T - ba^T$  で定義される。

§ 本稿の執筆にあたり全ての原著論文を調べ直した。セルトの初出論文としてはよく1896年の G. T. Walker [4] が挙げられてきたが，前年の1895年に簡単な論文紹介が掲載されている [3]。J. Walker の論文 [1] は戸田の書籍 [2] の参考文献欄で p. 144 と誤った記載がされている。日本語文献では，これを孫引きしたと思われる誤記例が多い。