広島工業大学紀要研究編
第 51 巻（2017）49-59
論　　　　文

実数の量子化

――量子重力理論へのひとつのアプローチ――

鈴木　貴*

（平成28年10月31日受付）

Quantization of Real Numbers

――An Approach to Quantum Gravity Theory――

Takashi SUZUKI

（Received Oct. 31, 2016）

Abstract

Towards a quantum theory of gravity, this paper presents a possible quantization of real numbers. The procedure to obtain a quantum real is as follows: We first prepare two algebras on the base space $\mathbb{R}$, a function algebra $H(\mathbb{R})$ and the Heisenberg algebra $A(\mathbb{R})$ as the operator algebra on $H(\mathbb{R})$. According to the scheme of, so-called, the deformation quantization, we obtain the deformed Heisenberg algebra $\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$ with the deformation parameter $q \in \mathbb{C}$ and, then, construct the deformed function algebra $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ on which $\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$ acts . The base space $\mathcal{R}$ introduced formally here is regarded as the quantum real numbers. In particular, we focus on the case where the parameter q is the N-th root of unity and obtain the deformed algebras $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$, $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$. Here, $\mathcal{R}^{(N)} := \mathcal{R}\Big|_{q^N=1}$ is proposed as the conclusive quantum real numbers. We further investigate the structure of $\mathcal{R}^{(N)}$ and show that $\mathcal{R}^{(N)}$ is isomorphic to the space $\mathbb{R}_q^{(N)} := \mathbb{R} \times \mathfrak{G}^{(N)}$ where the extra dimension $\mathfrak{G}^{(N)}$ is (para-)Grassmann space. Our conclusion is that the quantum real numbers $\mathbb{R}_q^{(N)}$ is just the (para-)superspace.

Key Words: Quantum real numbers, Deformation quantization, Noncommutative geometry, Super-space.

1　はじめに

自然界に存在する 4 つの相互作用をひとつの枠組みで記述する統一理論を構築することは，素粒子物理学に課せられた究極の課題である．重力以外の相互作用，すなわち電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用を合わせた理論は標準理論と呼ばれるゲージ理論の枠組みで量子論的に矛盾なく定式化されており，ヒッグス粒子の発見により，標準理論の実験的検証が完結したと言ってもよい．一方，重力を記述する理論として，現時点でわれわれが手にしている理論は Einstein の一般相対性理論だけである．しかし，一般相対性理論は古典的な重力理論であり，標準理論と合わせてひとつの枠組みに統一するためには，量子化された重力理論 (以下，量子重力理論と呼ぶ) を構築することが不可欠である．量子重力理論を含む統一理論の最有力候補として，30年以上にわたり「超弦理論」が盛んに研究されている (例えば [1])．超弦理論は未だ完成には至っていないものの，無矛盾な量子重力理論へ向けてのいくつかの重要な示唆を与えている．

* 広島工業大学工学部電気システム工学科

そのひとつは，超弦理論が導く時空では，座標どうしが非可換性をもつということである [2] – [6]．つまり，座標 x_i と x_j どうしの積が $x_i x_j \neq x_j x_i$ となる．この非可換性は「時空の量子化」，言い換えると「幾何学の量子化」と捉えることができる．事実，古典重力理論としての一般相対性理論が 4 次元時空を対象としたリーマン幾何学であることを考慮すると，量子重力理論に量子化された幾何学が密接に関与することはむしろ当然だと言える．

では，幾何学の量子化を実行するためには何を指針とするべきであろうか．そのヒントを得るために，古典力学から量子力学へ移行するときの概念の飛躍を復習しておこう．古典力学では,「点」粒子の座標 x_i と運動量 p_i の時間変化を調べることで点粒子の運動を「直接」追いかけるという立場をとっていた．ところが，量子力学では古典力学のように点粒子そのものの運動を直接追うのではなく，波動関数を通して粒子の振る舞いを調べるという「観測」に足場を置いている．具体的には，実数に値をとっていた物理量を自己共役作用素 (オブザーバブル) に格上げし，それらの作用素が作用するヒルベルト空間 $H(X)$ を粒子の配位空間 X の上に導入する．そして，点粒子の量子力学的状態は，ひとつの波動関数 $\psi(x,t) \in H(X)$ によって記述される．このように，量子力学では，ヒルベルト空間 $H(X)$ とその上の作用素代数 $A(X)$ が理論の主役に躍りでる．

一方，幾何学の対象は多様体 (空間)M であり，従来の幾何学 (以下，古典幾何学と呼ぶ) では M を「点」の集合として捉える．そこで,「点」粒子を量子化した量子力学の手法を幾何学の量子化へ踏襲することを考えよう．つまり，M の量子論的情報を得るために，M を構成する「点」そのものを直接取り扱うのではなく，M 上のある種の関数代数 $H(M)$ とそれに作用する作用素代数 $A(M)$ を準備し，これらの代数によって M の幾何学的状態を「観測」するという立場に立つ．ところで，多様体の幾何学的情報を関数によって引き出すという立場の正当性は，古典的な，すなわち従来の代数幾何学によっても保証されている．Gelfan'd-Naimark の定理によれば，多様対 M 上の関数代数 $C^\infty(M)$ と同型な可換 C^*-代数 $A(M)$ が存在し，M の幾何学は $A(M)$ によって自然に復元できることが知られている．

これに対して，量子幾何学の基本指針は，可換 C^*-代数 $A(M)$ を非可換な作用素代数 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ に格上げし，その底空間 $\mathcal{M}$ に現れる何らかの非可換性を論じるというものである．これが，近年数学や物理学の分野で勢力的に研究されている非可換幾何学であり，非可換代数 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ の構成法，すなわち $A(M)$ から $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ への量子化の手法に応じてさまざまな非可換幾何学を定義することができる．例えば，Connes による構成法 [7],[8]，変形量子化 [9]–[10]，または量子群に基づく構成法 [11]–[13] などが調べられている．

本稿では，時空の量子化に向けてのひとつのアプローチとして，実数 $\mathbb{R}$ を 1 次元の空間と見てその量子化を議論する．時空のひとつの点の座標は複数個の実数のセットで記述されるため，実数を量子化することで時空全体の量子化への糸口を見出すことが目的である．量子化された実数を作り，その構造を明らかにするために，次の 3 段階のステップを踏む．第 1 段階 (2 節) は，底空間 $\mathbb{R}$ 上の作用素代数 $A(\mathbb{R})$ と関数代数 $H(\mathbb{R})$ を量子化する段階である．$A(\mathbb{R})$ としてハイゼンベルグ代数を選び，$H(\mathbb{R})$ として，実数を変数とする連続関数のなす代数を選ぶ．量子化の手法は，変形パラメータ $q \in \mathbb{C}$ を用いた変形量子化 (q-変形) のアイデアに従う．量子化されたそれぞれの代数を $\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$, $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ とすると，それらの底空間 $\mathcal{R}$ が「量子実数」と解釈される空間である．第 2 段階 (3 節) では，q を 1 の N 乗根に制限し，量子作用素代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ を詳細に調べる．ここで，底空間 $\mathcal{R}^{(N)}(:= \mathcal{R}\big|_{q^N=1})$ が，本稿で提案する量子実数である．第 3 段階 (4 節) では $\mathcal{R}^{(N)}$ の構造を調べる．そのために，新たな底空間 $\mathbb{R}_q^{(N)} := \mathbb{R} \times \mathfrak{G}^{(N)}$ を形式的に導入し，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$, $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と同型な量子代数 $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$, $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ を構成する．そうすると，底空間に対しても $\mathcal{R}^{(N)} \cong \mathbb{R}_q^{(N)}$ と見なすことができ，量子実数の構造についての情報を $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$, $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ から引き出せるようになる．本稿では最終的に，実数 $\mathbb{R}$ を量子化することによって，$\mathbb{R}_q^{(N)} = \mathbb{R} \times \mathfrak{G}^{(N)}$ が示すように，$\mathbb{R}$ の各点に余剰次元 $\mathfrak{G}^{(N)}$ が量子効果として現れることを示し，さらに，$\mathfrak{G}^{(N)}$ が (パラ) グラスマン空間であること，すなわち，量子実数 $\mathbb{R}_q^{(N)}$ は (パラ) 超対称性

理論で定義される (パラ) スーパースペースであることを主張する．

2　ハイゼンベルグ代数の変形量子化

古典的なハイゼンベルグ代数とその表現　ハイゼンベルグ代数 A を，実数 $\mathbb{R}$ を底空間とする関数代数 $H(\mathbb{R})$ の上で表現することから始める．本稿では，

$$\begin{array}{lcl} \text{生成子} & : & a, \quad a^\dagger, \\ \text{定義関係式} & : & [a, a^\dagger] := a\,a^\dagger - a^\dagger a = 1 \end{array} \tag{2.1}$$

によって定義されるリー代数をハイゼンベルグ代数と呼ぶ[2]．ハイゼンベルグ代数 A を表現するために，実数全体で無限回微分可能な関数のなす空間，

$$C^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) \,\middle|\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\, x^n \right\} \tag{2.2}$$

に通常の積「$\cdot$」: $(f \cdot g)\,(x) := f(x)g(x)$ を入れた関数代数 $H(\mathbb{R}) := (C^\infty(\mathbb{R}), \cdot\,)$ を表現空間として選ぶ．

A を $H(\mathbb{R})$ の上で表現した作用素代数を $A(\mathbb{R})$ と記す．生成子 $a, a^\dagger$ を

$$a = \frac{d}{dx}, \qquad a^\dagger = \hat{x} := x\,I \quad (I \text{ は恒等作用素}) \tag{2.3}$$

のように表すことで，(2.1) の定義関係式が満たされることは容易に確かめられる．表現 (2.3) を用いると，$A(\mathbb{R})$ は，

$$A(\mathbb{R}) = \left\{ \hat{\alpha} \,\middle|\, \hat{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{d^n}{dx^n}, \quad a_n(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\} \tag{2.4}$$

となり，任意の $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in A(\mathbb{R})$ に対して，積 $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ を通常のライプニッツ則を用いて定義すれば，$A(\mathbb{R})$ は $H(\mathbb{R})$ 上の非可換代数になる．

ハイゼンベルグ代数の変形量子化　非可換幾何学の基本指針によれば，$A(\mathbb{R})$ と $H(\mathbb{R})$ を量子化することで，底空間 $\mathbb{R}$ も何らかの意味で量子化されると期待できる．そこで，ハイゼンベルグ代数 A の定義 (2.1) を，変形量子化のスキームに従って変形しよう．具体的には，変形パラメータ $q \in \mathbb{C}$ を導入して，q-変形された量子ハイゼンベルグ代数 $\mathcal{A}_q$ を次のように与える．$\mathcal{A}_q$ の生成子と定義関係式は，

$$\begin{array}{lcl} \text{生成子} & : & a_q, \quad a_q^\dagger, \\ \text{定義関係式} & : & a_q a_q^\dagger - q\,a_q^\dagger a_q = 1 \end{array} \tag{2.5}$$

である．ただし，q-変形量子化では $q \to 1$ の操作を古典極限と呼び，変形前の代数が復元されることを要請しなければならないので，$a_q, a_q^\dagger \xrightarrow{q \to 1} a, a^\dagger$ でなければならない．

本来の変形量子化では，可換な積を非可換な積 (例えば Moyal 積) に置き換えることで量子代数関係式を導く．ここでは省略したが，(2.5) の定義関係式は，Moyal 積を用いた変形量子化の手法により導くことができる．文献 [14] では，古典力学の Poisson 代数に 2 段階の Moyal 変形を施すことにより，(2.5) と同等な関係式が導かれている．

q-変形された関数代数　量子ハイゼンベルグ代数 $\mathcal{A}_q$ の表現を与えるために，表現空間として，$H(\mathbb{R})$ を q-変形した量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ を用意しておこう．この段階では，底空間 $\mathcal{R}$ は形式的に導入する空間であり，$\mathcal{R}$ を張る変数を x_q と書いておく．x_q を変数とする関数空間 $C_q^\infty(\mathcal{R})$ を，式 (2.2) の q-変形として

[2] 一般には無限次元ハイゼンベルグ代数を単に「ハイゼンベルグ代数」と呼ぶが，ここでは，式 (2.1) で与えられる代数を「ハイゼンベルグ代数」と呼ぶことにする．これは 3 次元ハイゼンベルグ代数に相当する．

$$C_q^\infty(\mathcal{R}) = \left\{ f_q(x_q) \;\middle|\; f_q(x_q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{[n]_q!}\, x_q^n,\ x_q \in \mathcal{R} \right\}. \tag{2.6}$$

のように導入する．ただし，

$$[n]_q := \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{2.7}$$

は q-整数と呼ばれる数である．

さらに，$^\forall f_q, g_q \in C_q^\infty(cR)$ に対して，通常の積 $(f_q \cdot g_q)(x_q) = f_q(x_q) g_q(x_q) \in C_q^\infty(\mathcal{R})$ を入れることで，閉じた可換代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}) = \big(C_q^\infty(\mathcal{R}), \cdot\big)$ が得られる．式 (2.6) および積の入れ方を考慮すると，古典極限で $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ が $H(\mathbb{R})$ に戻ることより，$\mathcal{R} \overset{q\to 1}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ が保証される．したがって，$\mathcal{R}$ は q-変形された実数，すなわち「量子実数」の候補として理解される．

量子ハイゼンベルグ代数 $\mathcal{A}_q$ の表現　量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ が与えられたので，$\mathcal{A}_q$ のひとつの表現として，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ 上への量子作用素代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$ を求めよう．つまり，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$ の生成子 $a_q, a_q^\dagger$ が古典極限で (2.3) に戻り，かつ (2.5) の定義関係式を満たすようにすればよい．まず，$a^\dagger = \hat{x}$ を考慮すると，$a_q^\dagger$ は $\mathcal{R}$ の座標演算子として，

$$a_q^\dagger f_q(x_q) = \hat{x}_q f_q(x_q) := x_q\, f_q(x_q), \qquad {}^\forall f_q(x_q) \in \mathcal{H}_q(\mathcal{R}) \tag{2.8}$$

のように選ぶことが自然である．$a_q^\dagger$ の作用を (2.8) で定めると，(2.5) の定義関係式を満たすためには，a_q は任意の関数 $f_q(x_q)$ に対して，

$$a_q f_q(x_q) = D_q f_q(x_q) := \frac{f_q(q x_q) - f_q(x_q)}{x_q(q-1)}, \tag{2.9}$$

のような作用をしなければならないことが直ちに導かれる．

作用素 D_q は「q-微分」と呼ばれる差分演算子であり，式 (2.9) において $f_q(x_q) = x_q^n$ とすると，次の q-微分公式が得られる：

$$D_q x_q^n = [n]_q\, x_q^{n-1}. \tag{2.10}$$

公式 (2.10) からも容易に確認できるように，$D_q \overset{q\to 1}{\longrightarrow} \frac{d}{dx}$ となるので，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$ は古典極限で $A(\mathbb{R})$ に戻ることが確認できる．

底空間 $\mathcal{R}$ の構造　量子作用素代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$ と量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ が得られたので，底空間 $\mathcal{R}$ の構造を調べることができる．式 (2.9) が示すように，D_q は x_q と qx_q との間の差分演算子であることから，あるひとつの x_q を基準として選ぶと，$\mathcal{R}$ は，

$$\mathcal{R}(\xi_0) = \left\{ \xi_k \;\middle|\; \xi_k := q^k x_q, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \tag{2.11}$$

のような離散的な「点」の集合に限定できてしまう．厳密に言えば，$\mathcal{R}(\xi_0) \cong \mathbb{Z}$ である．量子化によって連続空間 $\mathbb{R}$ から離散的な空間 $\mathcal{R}(\xi_0)$ へ移行したことは，古典力学でのエネルギーの連続性から量子力学での離散的エネルギー準位への移行を思い起こさせるが，同種の量子効果だとは考えにくい．また，式 (2.11) では，$\mathcal{R}(\xi_0)$ はひとつの基準点 $\xi_0 = x_q$ に対して決まる集合であるが，ξ_0 の選び方の任意性や x_q 自身の性質については，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$ と $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ だけでは何も言及できない．例えば，$\mathcal{R}(\xi_0)$ を構成する「点」ξ_k はユークリッド幾何学的な点なのか，それとも何らかの量子効果によって揺らいでいるのだろうか? また，隣り合う ξ_k と ξ_{k+1} の間には何らかの構造があるのだろうか? このように，底空間 $\mathcal{R}$ 自体の構造や性質については依然不明瞭であるため，式 (2.11) で与えた $\mathcal{R}(\xi_0)$ を「量子実数」として提案することはしない．

3　q が 1 の巾根の場合の変形量子化

前節で実行した q-変形では，変形パラメータ q の値には制限を設けず，任意の複素数として扱っていた．ところが，量子群や q-変形においてよく知られているように，変形パラメータ q が 1 の巾根，すなわち，ある自然数 N に対して $q^N = 1$ を満たすとき，変形された群や代数には非自明な構造が現れる [15], [16]．このような構造は，古典的な場合 $(q = 1)$ や 1 の巾根ではない場合 $(q^N \neq 1)$ の場合には決して見られず，q が 1 の巾根の場合にのみ現れる極めて特徴的な構造である．そこで本節では，q を 1 の N 乗根，すなわち

$$q = e^{2\pi i \frac{1}{N}} \qquad N \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \tag{3.1}$$

に設定し，その場合の量子作用素代数と量子関数代数を再構築する．以降，(3.1) に対する底空間を $\mathcal{R}^{(N)}$ と書き，量子作用素代数と量子関数代数を，それぞれ $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と記す．ここでも $\mathcal{R}^{(N)}$ は形式的に導入したもので，その構造の解明は次節で行う．

q が 1 の巾根の場合の特殊性　変形パラメータ q が 1 の N 乗根の場合に現れるすべての非自明な構造の根源は，関係式 $[N]_q = 0$ にある．例えば，q-微分公式 (2.10) の中で $n = kN + r$ とすると，

$$D_q x_q^{kN+r} = [r]_q x_q^{kN+r-1}, \qquad k \in \mathbb{N} \oplus \{0\}, \quad r \in \{0, 1, \cdots, N-1\} \tag{3.2}$$

となり，古典極限 $q \to 1$ で通常の微分公式を再現することができない．式 (3.2) に古典極限との整合性を持たせる唯一の方法は，D_q に関して x_q^N を「定数」と見なすことである．しかし，もしも x_q^N を定数として扱うと，量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ は基底 $\{x_q^r | r = 0, 1, \cdots, N-1\}$ によって張られる N 次多項式のなす関数代数に落ちてしまう．

この事情は以下のように示すこともできる．1 の巾根の場合の q-整数が満たす公式

$$[kN + r]_q = [r]_q \quad (r \neq 0), \qquad [kN]_q = k\,[N]_q \tag{3.3}$$

を用いると，

$$D_q^N f_q(x_q) \propto [N]_q, \qquad {}^\forall f_q(x_q) \in \mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)}) \tag{3.4}$$

となることがわかる．つまり，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ のすべての関数は D_q^N によって消されてしまい，このままでは，上述のように $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ は N 次多項式の関数代数になってしまう．

$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ の構築　そこで，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ を無限次元の関数代数に回復させる方法を考えよう．式 (3.4) の具体例として $f_q(x_q) = x_q^{kN+r}$ とすると，

$$\begin{aligned} D_q^N x_q^{kN+r} &= [kN+r]_q [kN+r-1]_q \cdots [(k-1)N+r+1]_q x_q^{(k-1)N+r} \\ &= k\,[N]_q!\, x_q^{(k-1)N+r} \end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る．ここで，変数変換

$$x_q^N \quad \longrightarrow \quad [N]_q!\, \chi, \tag{3.6}$$

によって新たな変数 χ を導入し，さらに作用素に対しても，

$$D_q^N \quad \longrightarrow \quad D_\chi \tag{3.7}$$

と書き換えると，式 (3.5) は表面的に，

$$D_\chi \chi^k x_q^r = k \chi^{k-1} x_q^r \tag{3.8}$$

と書ける．式 (3.8) は，

(i) D_χ が変数 χ に関する通常の微分作用素として振る舞う，

(ii) x_q^r, $(r \leq N-1)$ は D_χ について定数として振る舞う，

ことを示唆している．上の (i) と (ii) を公式としてまとめると次のようになる：

$$\begin{aligned} D_q\, x_q^r &= [r]_q\, x_q^{r-1}, \qquad D_q \chi^k = 0, \\ D_\chi x_q^r &= 0, \qquad D_\chi\, \chi^k = k\chi^{k-1}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

このように，変形パラメータ q が 1 の巾根の場合には，もとの変数 x_q に加えて新たな変数 χ が現れ，かつ χ に関する作用素 D_χ も追加されたように見える．ここで重要なことは，x_q と χ の関係式 (3.6) にもかかわらず，これらの 2 つの変数が D_q と D_χ の作用の下では実質的に独立変数として振舞うことである．したがって，量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ は，2 つの基底 $\{x_q^r \,|\, r = 0, 1, \cdots, N-1\}$ と $\{\chi^k \,|\, k = 0, 1, 2, \cdots\}$ で張られることになり，無限次元の関数代数として蘇る．

積の導入　次に，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ に入れる積の構造を考えよう．q が 1 の巾根ではない場合は通常の積「$\cdot$」によって $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ は閉じた可換代数になっていたが，1 の巾根の場合には新たな変数が誘発されたため，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ を閉じた関数代数にするための適切な積を考え直さなければならない．そこでまず，公式 (3.3) を用いて，式 (2.6) で与えた関数 $f_q(x_q) \in C_q^\infty(\mathcal{R})$ を 2 つの変数 x_q, χ を使って書き換えると，

$$f_q(x_q) \quad \longmapsto \quad f_q(x_q, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} \gamma_r^k \, \frac{\chi^k}{k!} \, \frac{x_q^r}{[r]_q!} \in C_q^\infty(\mathcal{R}^{(N)}) \tag{3.10}$$

となる．$C^\infty(\mathcal{R}^{(N)})$ に入れる積として，通常の積 $(f_q \cdot g_q)(x_q, \chi) = f_q(x_q, \chi) g_q(x_q, \chi)$ を

$$(\chi^k x_q^r) \cdot (\chi^{k'} x_q^{r'}) = \left\{ \begin{array}{ll} \chi^{k+k'} x_q^{r+r'}, & r + r' < N \\ \chi^{k+k'+1} x_q^{r+r'-N}, & r + r' \geq N \end{array} \right. . \tag{3.11}$$

によって定義することも可能である．しかし，以下の議論では，もうひとつの積$*: C_q^\infty(\mathcal{R}^{(N)}) \times C_q^\infty(\mathcal{R}^{(N)}) \to C_q^\infty(\mathcal{R}^{(N)})$ を定義し，この積を入れた量子関数代数を $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)}) = \big(C_q^\infty(\mathcal{R}^{(N)}), *\big)$ と定義する．

積「$*$」を定義するために，(3.10) で与えたひとつの関数 $f_q(x_q, \chi)$ から行列 $\mathcal{M}(f_q)$ を次のルールで対応させる：

$$f_q(x_q, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{N-1} \gamma_r^k x_q^r \right) \chi^k \quad \longmapsto \quad \mathcal{M}_{r\,r'}^{k\,k'}(f_q) = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_{r-r'}^{k-k'}, & k \geq k',\ r \geq r' \\ 0, & \text{otherwise.} \end{array} \right. . \tag{3.12}$$

この行列を具体的に書き下すと，

$$\mathcal{M}(f_q) = \begin{pmatrix} \Gamma^{00} & 0 & \cdots \\ \Gamma^{10} & \Gamma^{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \left(\Gamma^{k\,k'}\right)_{r\,r'} = \begin{pmatrix} \gamma_0^{k-k'} & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1^{k-k'} & \gamma_0^{k-k'} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N-1}^{k-k'} & \gamma_{N-2}^{k-k'} & \cdots & \gamma_0^{k-k'} \end{pmatrix}$$

のようなブロック構造を持つ．この行列表現を用いて，2 つの関数 $f_q(x_q, \chi)$ と $g_q(x_q, \chi)$ の積は，

$$(f_q * g_q)(x_q, \chi) := \mathcal{M}^{-1}\left(\mathcal{M}(f_q)\mathcal{M}(g_q)\right)(x_q, \chi) \tag{3.13}$$

によって定義する．ここで，$\mathcal{M}^{-1}$ は逆行列ではなく，行列表現から関数へ戻す逆写像であることを注意しておく．

式 (3.13) で与えられる積が満たす重要な性質は「ニルポテンシィ」である．つまり，

$$x_q^{*N} := \underbrace{x_q * x_q * \cdots * x_q}_{N\,\text{個}} = 0 \tag{3.14}$$

のように，N 乗すると 0 になるというものである．式 (3.14) は容易に示すことができる．関数 $f_q(x_q, \chi) = x_q$ を選び，(3.12) に従えば，この関数の行列表現 $\mathcal{M}(x_q)$ は，

$$f_q(x_q, \chi) = x_q \quad \longmapsto \quad \mathcal{M}(x_q) = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & \cdots & \\ 0 & \Gamma & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}$$

となる．ここで，対角ブロックに並んでいる行列 Γ はクロネッカー δ-関数を用いて，

$$\Gamma_{r\,r'} = \delta_{r\,r'+1}$$

と表せることに注意すると，$\Gamma^N = 0$ となることから，式 (3.14) が得られる．

ちなみに，式 (3.14) で示したニルポテンシィは，積を「$*$」に選んだことに由来している．もし，(3.11) で定義した通常の積を採用していれば，ニルポテンシィは現れないことを強調する．次節では，このニルポテンシィが量子実数の構造に本質的に関与することを見る．

量子作用素代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$　以上で，q が 1 の N 乗根の場合の量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ を構成することができた．本節の最後に，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ に作用する量子作用素代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ を正式に定義する．まず，(q-) 微分作用素 D_q, D_χ についてはすでに式 (3.9) で作用が与えられている．また，座標演算子を，

$$\hat{x}_q := x_q\,I, \qquad \hat{\chi} := \chi\,I \tag{3.15}$$

によって定義する．さらに，$\hat{x}_q$, $\hat{\chi}$, D_q, D_χ が満たす関係式を計算すると，

$$D_q\,\hat{x}_q - q\,\hat{x}_q D_q = 1, \qquad D_\chi\,\hat{\chi} - \hat{\chi}\,D_\chi = 1 \tag{3.16}$$

が得られる．作用素 $\hat{x}_q, D_q$, $\hat{\chi}, D_\chi$ を生成子として張られ，(3.16) で得られた交換関係を定義関係式とする作用素代数を $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と定義する．

4　量子実数の定義と構造

前節で，1 の N 乗根の変形パラメータ q に対する量子代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ を構築した．これらの代数の底空間 $\mathcal{R}^{(N)}$ が本稿で提案する量子実数である．この節の目的は $\mathcal{R}^{(N)}$ の構造を明らかにして，量子実数の厳密な定義を与えることである．その目的を達成する手がかりとして，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ の本質的な性質を列挙しておこう．

性質 1 : $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ に現れた 2 種類の変数 x_q と χ とは，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ の作用の下では独立変数として振る舞う．

性質 2：式 (3.14) が示すように，変数 x_q に関する積「$*$」はニルポテンシーを示す．

性質 3：新たな変数 χ に関する座標演算子 $\hat{\chi}$ と微分演算子 D_χ が満たす定義関係式は，(3.16) が示すように，古典作用素代数 (ハイゼンベルグ代数)$A(\mathbb{R})$ の定義関係式 (2.1) と一致する．

量子実数の構造　上記の 3 つの性質は，量子実数 $\mathcal{R}^{(N)}$ がもはや 1 次元的な空間ではなく，実質的に「2 次元」の構造を持ち，その 1 次元部分だけが通常の実数と同定できることを示唆している．この示唆に基づき，この段階で，本稿の結論としての量子実数の厳密な定義を与えておく．

量子実数の定義：　次の構造をもつ $\mathbb{R}_q^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$ を量子実数と定義する．

$$\mathbb{R}_q^{(N)} := \mathbb{R} \times \mathfrak{G}^{(N)}. \tag{4.1}$$

ここで，$\mathbb{R}$ は通常の (古典的な) 実数であり，$\mathfrak{G}^{(N)}$ は次数 N のパラグラスマン空間である．つまり，量子実数 $\mathbb{R}_q^{(N)}$ は，通常の実数 $\mathbb{R}$ の各点にもうひとつのパラグラスマン空間 $\mathfrak{G}^{(N)}$ が付随している空間である．量子効果として付加された次元 $\mathfrak{G}^{(N)}$ を「余剰次元」と呼ぶ．

以下の議論では $\mathbb{R}_q^{(N)}$ を量子実数と定義することの根拠を与えるために，$\mathcal{R}^{(N)} \cong \mathbb{R}_q^{(N)}$ を示す．そのためには，同型写像によって，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ から，$\mathbb{R}_q^{(N)}$ 上の量子代数 $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ と $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ が構成できることを示せばよい．

量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ から $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ へ　本節の冒頭で挙げた 3 つの性質を考慮すると，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ から次の写像 π によって新たな関数代数が構成できる．

$$x_q \quad \overset{\pi}{\longmapsto} \quad 1 \otimes \vartheta, \qquad \chi \quad \overset{\pi}{\longmapsto} \quad x \otimes 1. \tag{4.2}$$

ここで，x は通常の実数であり，x_q が写される変数として ϑ を形式的に導入した．この写像を式 (3.10) に用いると，

$$f_q(x_q, \chi) \quad \overset{\pi}{\longmapsto} \quad \Phi(x, \vartheta) = \sum_{r=0}^{N-1} \phi_r(x)\, \vartheta^{*r}, \quad \phi_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_r^k\, x^k \tag{4.3}$$

のような新たな関数が作られる．ただし，式 (4.3) では，実数のセクターと余剰次元のセクターの間の直積記号「$\otimes$」を省略している．

次に，(4.3) で与えられた関数どうしの積について述べる．まず，実数のセクターには通常の積を持ちこむ．一方，余剰次元のセクターには，$\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ の変数 x_q に関する積「$*$」を継承させる．つまり，

$$\chi^k \cdot \chi^{k'} \quad \overset{\pi}{\longmapsto} \quad x^{k+k'} \otimes 1, \qquad x_q^{*r} * x_q^{*r'} \quad \overset{\pi}{\longmapsto} \quad 1 \otimes \vartheta^{*r} * \vartheta^{*r'} \tag{4.4}$$

である．このように積を導入すると，(4.4) の第 2 式より，x_q が満たすニルポテンシィ(3.14) は ϑ にそのまま受け継がれ，

$$\vartheta^{*N} = \underbrace{\vartheta * \vartheta * \cdots * \vartheta}_{N\,\text{個}} = 0, \tag{4.5}$$

が成り立つようになる．式 (4.5) は，変数 ϑ が次数 N のパラグラスマン数であることを示している．したがって，ϑ で張られる余剰次元はパラグラスマン空間であると結論され，$\mathfrak{G}^{(N)}$ と記す．式 (4.3) で与えられた関数の集合に上記の積を導入した関数代数を $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ とすると，π は 1 : 1 対応であり，積が保たれていることから $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right) \cong \mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ が示された．

量子作用素代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ から $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ へ　量子関数代数 $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ の上への作用素代数を考えよう．その作用素代数を $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ とすると，同型写像 π は $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ から $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ への同型写像 $\hat{\pi}$ を誘導する．とくに，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ の生成子については，

$$\begin{aligned} \hat{\chi} \quad &\overset{\hat{\pi}}{\longmapsto} \quad \hat{x} \otimes id, \qquad D_\chi \quad \overset{\hat{\pi}}{\longmapsto} \quad \partial_x \otimes id, \\ \hat{x}_q \quad &\overset{\hat{\pi}}{\longmapsto} \quad id \otimes \hat{\vartheta}, \qquad D_q \quad \overset{\hat{\pi}}{\longmapsto} \quad id \otimes D_\vartheta, \end{aligned} \tag{4.6}$$

のように写される．具体的に，$\Phi(x,\vartheta) \in \mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ への作用を書き下すと，

$$\begin{aligned} \hat{x}\,\Phi(x,\vartheta) &= x\,\Phi(x,\vartheta), \qquad \partial_x \Phi(x,\vartheta) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\vartheta), \\ \hat{\vartheta}\,\Phi(x,\vartheta) &= \vartheta * \Phi(x,\vartheta), \qquad D_\vartheta \Phi(x,\vartheta) = \frac{\Phi(x,q\vartheta) - \Phi(x,\vartheta)}{\vartheta(q-1)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

となる．また，(4.7) より直ちに $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ の定義関係式が，

$$\partial_x\,\hat{x} - \hat{x}\partial_x = 1, \qquad D_\vartheta\,\hat{\vartheta} - q\,\hat{\vartheta} D_\vartheta = 1, \tag{4.8}$$

のように得られる．

量子実数 $\mathbb{R}_q^{(N)}$ と超対称空間　以上で，量子実数 $\mathcal{R}^{(N)}$ を底空間とする量子代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$, $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と，$\mathbb{R}_q^{(N)}$ を底空間とする $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$, $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ とは同型であることが示された．したがって，底空間に対しても $\mathcal{R}^{(N)} \cong \mathbb{R}_q^{(N)}$ であると見なせ，式 (4.1)で定義した $\mathbb{R}_q^{(N)}$ を「量子実数」として主張できることが保証された．この量子実数では，実数 $\mathbb{R}$ の各点に付随するパラグラスマン空間 $\mathfrak{G}^{(N)}$ が量子効果と解釈できる．実際，$\mathbb{R}_q^{(N)}$ が $q^N = 1$ を満たす変形パラメータに対する量子変形であったことを思い出すと，古典極限 $q \to 1$ は $N = 1$ に相当するので，$\mathbb{R}_q^{(N)} \xrightarrow{q\to 1} \mathbb{R}_q^{(1)} = \mathbb{R}$ となる．つまり，古典極限では，量子実数の余剰次元は消えて実数そのものに戻る．

最後に，実数部と余剰次元との間に現れる重要な関係を指摘し，量子実数 $\mathbb{R}_q^{(N)}$ の正体を明らかにしよう．ここまでの議論では，$\mathbb{R}_q^{(N)}$ の実数部と余剰次元とは独立と見なされていた．事実，$\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ の作用の下では，変数 x と ϑ とは独立である．ところが，$\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ では，D_q と D_χ とを式 (3.7) で結んでいたことを思い出さなければならない．この関係を $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ に持ち込むと，

$$id \otimes (D_\vartheta)^N = \partial_x \otimes id \tag{4.9}$$

となる．関数 $\Phi(x,\vartheta) \in \mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ に対して具体的に作用を書くと，

$$D_\vartheta^N \Phi(x,\vartheta) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\vartheta) \tag{4.10}$$

となり，余剰次元方向への N 回の差分が実数方向の無限小変換を引き起こすことがわかる．とくに，$N = 2$ の場合の式 (4.10) は超対称性理論を思い起こさせる．実際，差分作用素 D_ϑ をボソンとフェルミオンを入れ替えるスーパーチャージ Q と見なすと，(4.10) は超対称性理論における重要な関係式 $Q^2 = \partial_x$ に一致する．また，$N = 2$ の場合は ϑ はグラスマン数となり，量子実数 $\mathbb{R}_q^{(2)}$ はスーパースペースと理解できる．一般の N においても，差分作用素 D_ϑ をパラスーパーチャージ $\mathcal{Q}$ と同一視することで (4.10) は $\mathcal{Q}^N = \partial_x$ となり，$\mathbb{R}_q^{(N)}$ はパラスーパースペースであると期待できる．

5　まとめ

本稿では，重力の量子化への足がかりを得ることを目的として，実数 $\mathbb{R}$ の量子化を試みた．量子実数を導くための基本指針として，ひとつの空間の量子幾何学的情報はその上の非可換代数から引き出せるという非可換幾何学のアイデアに基づいている．具体的には，量子化のターゲットである 1 次元空間 $\mathbb{R}$ 上の作用素代数 $A(\mathbb{R})$ としてハイゼンベルグ代数を選び，それが作用する関数代数 $H(\mathbb{R})$ を準備した．これらの代数たちに q-変形を施し，得られた量子代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R})$ と $\mathcal{H}_q(\mathcal{R})$ の底空間を「量子実数」として定義しようというのがアイデアである．そして，変形パラメータ q の値を 1 の N 乗根に制限し，そのときの量子作用素代数 $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と量子関数代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ の底空間 $\mathcal{R}^{(N)} = \mathcal{R}\big|_{q^N=1}$ を最終的な量子実数と定義した．

最も重要なステップは，得られた量子実数 $\mathcal{R}^{(N)}$ の構造を明らかにすることである．そのために，新たな底空間 $\mathbb{R}_q^{(N)} = \mathbb{R} \times \mathfrak{G}^{(N)}$ を導入し，その上に構築した量子代数 $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$, $\mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ が，それぞれ $\mathcal{A}_q(\mathcal{R}^{(N)})$, $\mathcal{H}_q(\mathcal{R}^{(N)})$ と同型であることを示した．そのことで，底空間に対しても $\mathcal{R}^{(N)} \cong \mathbb{R}_q^{(N)}$ が保証され，量子実数の実体は $\mathbb{R}_q^{(N)}$ であると結論した．量子実数 $\mathbb{R}_q^{(N)}$ は 2 次元的構造を持つ．つまり，余剰次元 $\mathfrak{G}^{(N)}$ が量子効果によって現れたと理解できる．ここで，$\mathfrak{G}^{(N)}$ はパラグラスマン空間であるという事実が本質的である．これらの検討から，量子実数 $\mathbb{R}_q^{(N)}$ は「パラスーパースペース」であることが理解でき，$\Phi(x,\vartheta) \in \mathcal{H}\left(\mathbb{R}_q^{(N)}\right)$ が超対称性理論のスーパーフィールドであると期待できる．重力を含めた統一理論の構築においては，超対称性は不可欠な概念である [17]．しかし，従来の超対称性理論では，超対称性は理論の整合性を鑑みて「手で」付加する対称性であった．一方，実数を量子化することにより，(パラ) スーパースペースが「自然に」現れたことは大変興味深い．本件急で実行した実数の量子化を重力 (時空) の量子化に拡張することで，超対称性を含む理論構築が自然に成されることを期待している．

参考文献

[1] J. Polchinski. “String Theory I, II”, Cambridge University Press (1998).

[2] E. Witten. Nucl. Phys. **B460** (1996) p.33.

[3] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz. JHEP **02** (1998) p.003.

[4] N. Seiberg and E. Witten. JHEP **09** (1999) p.032.

[5] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov. Rev. Mod. Phys. **73** (2001) p.977, and references therein.

[6] T. Yoneya. Prog. Theor. Phys. **103** (2000) p.1081; Prog. Theor. Phys. Supple. **144** (2001) p.1176.

[7] A. Connes. “Noncommutative Geometry”, Academic Press (1994).

[8] G. Landi. “An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry”, Springer Verlag (1997).

[9] C. K. Zachos. Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002) p.297.

[10] 前田吉昭，佐古彰史．“幾何学の量子化 – 変形量子化からのアプローチ”, SGC ライブラリー 95, サイエンス社 (2015).

[11] A. C. Hirshfeld and P. Henselder. Am. J. Phys. **70** (2002).

[12] S. Majid. “Quantum Groups and Noncommutative Geometry”, hep-th/0006167(2000).

[13] Yu. I. Manin. “Topics in Noncommutative Geometry”, Princeton University Press (1991).

[14] T. Suzuki. J. Math. Phys. **34** (1993) 3453.

[15] 神保道夫. “量子群とヤン・バクスター方程式”, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.

[16] T. Suzuki. J. Math. Phys. **35** (1994) p.6857.

[17] J. Wess and J. Bagger. “Supersymmetry and Supergravity”, Princeton Univ. Press (1991); (和訳) “超対称性と超重力”, 丸善出版 (2011).