

超弦理論が表す高次元時空の重力とその測定法の検討

— 原子間力顕微鏡法 —

鈴木 貴*・長尾 絢**・尾崎 徹***

(平成25年10月31日受付)

Evaluation of Method of Measuring Gravity in Higher-Dimensional Spacetime Derived from Superstring Theory

— Atomic Force Microscopy —

Takashi SUZUKI, Jun NAGAO and Tōru OZAKI

(Received Oct. 31, 2013)

Abstract

Based on the brane world scenario derived from the superstring theory, this article examines a possibility of detecting higher-dimensional spacetime with an atomic force microscope (AFM). The spacetime assumed in this scenario contains an extra dimension in addition to the “observed” (1 + 3)-dimensional spacetime, where the 3-dimensional space, i.e., the universe is called the brane world. The extra dimension is supposed to have d spacial dimensions and be compactified in the small region of a size. The following facts play essential roles in our discussion; only the gravity spreads over the extra dimension as well as the brane, and the strength of the gravity in the extra dimension is stronger than that in the brane, so-called, the Newtonian gravity. We first calculate the size of the extra dimension and the gravitational constant in it. Using the results, we estimate whether AFM can detect the extra dimension by measuring the gravitational force and interval between two xenon atoms. We find that the strength of gravity becomes stronger and the interval shorter in extra dimensions, $d = 1, 2, 3$. These values are too small to be detected with AFM.

Key Words: superstring, brane world, gravitation in higher-dimension, extra dimension, atomic force microscope

1 はじめに

私たちの宇宙は、およそ137億年前にビッグバンによって誕生した。その宇宙とは何か、そしてどのような進化を遂げて現在の姿になったのか。この究極の間に答えるためには、宇宙に存在するすべての「物質」とその器としての「時空」に対する基本法則を見つけなければならない。私

たちは、物質に対する理論として、実験の結果をきわめて精密に再現する基礎理論をすでに手にしている。それが「素粒子の標準理論」である[1]。この理論によって、宇宙の歴史をビッグバンの 10^{-10} 秒後まで遡って理解することができるようになった。しかし、それ以前の物質の形態や、時空構造については標準理論を適用することはできない。

標準理論の限界を越えることができる最も有力な候補

* 広島工業大学工学部電気システム工学科

** 広島工業大学工学部電子工学科 2002年度卒業生

*** 広島工業大学工学部電子情報工学科

が、超弦理論である[2, 3]。実際、超弦理論によって、ビッグバンの直前 10^{-44} 秒にまで迫ることが可能になると考えられている。その頃の宇宙のエネルギーになると、時空構造の量子論的な揺らぎが顕著になり、時空と物質の区別ができなくなると予想されていたが、超弦理論はまさにそれを理論的に導くことができる。さらに興味深いことは、超弦理論自身が時空の次元を「 $10(=1+9)$ 次元」に制限することである。超弦理論のこの最も重要な帰結は、時空の次元は「 $4(=1+3)$ 次元」であるという観測事実明らかに矛盾する。しかし、超弦理論に現れる3次元の広がりをもつ「ブレーン」と呼ばれる実体を、私たちが観測している3次元空間（宇宙）と同一視するという「ブレーン仮説」を認めれば、余分な6次元（余剰次元）が隠されているメカニズムを説明することができる[4]。超弦理論によれば、ブレーンは10次元の全時空の中に浮いているのだが、物質世界を閉じ込めて重力以外の外部との相互作用を一切遮断する性質をもつ。したがって、私たちは余剰次元に入り込むこともできなければ知覚することもできない。これが、超弦理論が説明する高次元時空を認識できない理由である。さらに、余剰次元の幾何学的構造が物質世界のあり方を決めてしまうことなど、超弦理論において高次元時空は本質的な役割を果たしている。ところが、超弦理論を通常の実験方法で検証することはできない。したがって、余剰次元の存在を超弦理論の枠組みで検証することはできない。

余剰次元の存在を検証するために、ブレーンのアイデアだけを超弦理論から切り離して、高次元時空の上で標準理論を越える理論を構築する取り組みがなされている。この理論構築を「ブレーン世界シナリオ」と呼ぶ[5, 6]。このシナリオでは全時空の次元を $1+3+d$ 次元と仮定することで、現在実験的に到達可能なエネルギースケールの物理を構築し、標準理論の未解決問題を解決しようと試みられている。大型ハドロン衝突型加速器（LHC）の始動により、ブレーン世界シナリオの検証が検討されており、余剰次元の実験的証拠がつかめるのではないかと期待されている。

本稿では、加速器のような大規模な実験装置を用いるのではなく、本学にもある原子間力顕微鏡（AFM）によって余剰次元が検出可能かどうかを検討する[7]。重力だけはブレーンに束縛されず余剰次元にも浸みだすため、重力の強さは余剰次元の有無、さらにはその次元数にも依存する。これをAFMによって検出することができるかということが本研究のアイデアである。次章では、標準理論からブレーン世界シナリオへ至る理論の流れを概説する。3章では、高次元時空での重力の法則を説明する。そして4章で、Xe-Xe原子間のファンデルワールス力に余剰次元の

重力効果を加えたとき、AFMによって重力を検出できるかどうかを検討する。

2 標準理論から超弦理論へ

2.1 標準理論とその限界

標準理論のエネルギースケールは $E_S \sim 10^3 \text{ GeV}$ である。このエネルギーを用いると、物質を物質波の波長 $\lambda_S = \frac{hc}{E_S} \sim 10^{-18} \text{ m}$ の微細構造にまで踏み込んで調べることが可能になる。このスケールで物質を観測すると、物質の最小単位、すなわち素粒子として6種類のクォークと6種類のレプトンが現れ、それらの素粒子どうしは電磁力、弱い力、強い力の3種類の相互作用によって互いに結びついているようすが見える。

標準理論は、これらの3つの相互作用をゲージ理論という枠組みによって記述する。ゲージ理論のエッセンスは、ゲージ原理と呼ばれる唯一の基本原理を要請すれば相互作用のメカニズムが完全に決定されてしまうということである。そのメカニズムはつぎのとおりである。ゲージ原理の要請に従うためには、ひとつひとつの素粒子はゲージ粒子と呼ばれる粒子を絶えず放出したり吸収していなければならない。図1に示すように、ある素粒子から放出されたゲージ粒子がほかの素粒子に吸収されると、ゲージ粒子を通じて運動量の授受が行われ、2つの素粒子間に力が生じたことになる。それぞれの相互作用には固有のゲージ粒子が存在する。電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用のゲージ粒子はそれぞれ光子、弱ボソン、グルーオンと呼ばれる。このように、 λ_S の分解能で物質世界を調べると、物質の構成要素としての12種類の素粒子と、3種類の相互作用を媒介するゲージ粒子が現れる。標準理論の構成メンバーはこれらの粒子とヒッグス粒子であり、 E_S までの実験ですべての粒子が確認された。

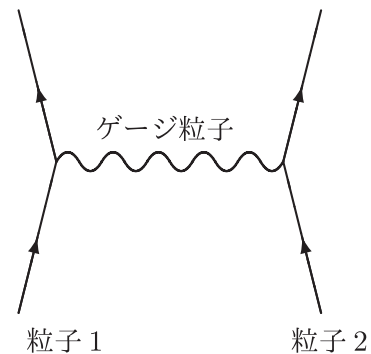


図1：相互作用のメカニズム

現在までのところ、標準理論に矛盾する実験事実はない。しかし、 E_S を越えると、標準理論の予言能力は急速に失われる。さらに、自然界には上記の3つの相互作用に加え

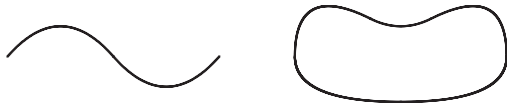


図2：開いた弦（左図） 閉じた弦（右図）

て「重力」が存在するが、標準理論には重力の理論が含まれていない。3つの相互作用は物質世界のみに関与する力であるのに対して、重力は時空の幾何学的構造に関わる力である。標準理論に重力が含まれていないということは、標準理論では時空構造を理解することができないことを意味する。

2.2 超弦理論とは

そこで、真の宇宙の姿を解明するためには標準理論を越える理論が必要になる。その有力な候補が超弦理論である。超弦理論のエネルギースケールは「プランクエネルギー」と呼ばれ、 E_s よりも16桁も大きい $E_p \sim 10^{19}$ GeV である。このエネルギーを用いると、プランク長 $\lambda_p \sim 10^{-35}$ m の分解能が得られる。一般に、このスケールにおける正しい理論としての必要条件は、(i) 量子力学的な重力理論を含むこと、(ii) 4つの相互作用を統一された形で含むことである。実際、 λ_p ほどの短距離になると時空の量子力学的なゆらぎが顕著になり、一般相対性理論のような古典的な、つまり滑らかな時空に対する重力理論は適用できない。さらに、 E_p に達すると4つの力の区別がなくなり、唯一の相互作用に統一されると考えられている。超弦理論は、現時点でこの条件を満たす唯一の理論である。

超弦理論によれば、宇宙のすべての最小単位は「点粒子」ではなく、長さが λ_p 程度の「1次元的な弦」である。図2に示すように、弦には「開いた弦」と「閉じた弦」の2種類の弦が存在する。標準理論のスケール λ_s 程度の分解能では「点」にしか見えなかった素粒子やゲージ粒子を λ_p にまでクローズアップして観測すると、その正体はたった2種類の弦だったということである。逆に、開いた弦を λ_s のスケールで観測すると、弦の振動や回転の状態に応じてクォークやレプトン、さらに光子、弱ボソン、グルーオンなどのゲージ粒子に見える。一方、閉じた弦には、 λ_s のスケールで観測したとき「重力子」と呼ばれる重力を伝えるゲージ粒子に相当するモードが含まれている。以下の議論の中で本質的なことは、 λ_p のスケールで宇宙を観測すると、標準理論が対象とする「物質世界」は開いた弦だけから構成され、重力のみが閉じた弦に関与しているということである。

2.3 高次元宇宙とブレーン

標準理論では、時空は4 (= 1 + 3) 次元であると「仮定」

されていた。ところが、超弦理論では理論の無矛盾性から、空間は9次元方向に広がっており、時間を合わせて時空は10次元でなければならないことが導かれる。理論自身が時空の次元を決定したことは、超弦理論が時空の幾何学的構造をも守備範囲としていることの決定的な証拠である。ところで、観測されている時空はまぎれもなく4次元である。事実、4次元時空における標準理論の正しさは、高い精度で実験的に実証されている。したがって、超弦理論が真の宇宙を記述する究極の理論であるためには、余剰次元と呼ばれる残りの6次元空間がなぜ認識されないのかを、超弦理論自身で説明できなければならない。

近年、それに対する1つの解答が与えられた。従来、超弦理論の構成要素としては図2に示した「1次元的な弦」だけであったが、それ以外に、より高い次元の広がりをもつ「ブレーン」と呼ばれる構成要素が存在することが明らかになった[4]。 p 次元の空間的な広がりをもつブレーンを D_p -ブレーンと呼ぶ。 D_p -ブレーンは10次元時空の中を運動しているが、ブレーンの本質的な特徴は、図3に示すようにブレーンの上に開いた弦の端点を束縛し、開いた弦をブレーンの中に閉じ込めてしまうということである。つまり、全時空が10次元であっても、開いた弦だけは p 次元の D_p -ブレーンの中だけを動くことしかできない。ここで、標準理論に登場する素粒子や光などのゲージ粒子はすべて開いた弦であることを思いだすと、物質世界は D_p -ブレーン内部に閉じ込められていることになる。そこで、観測している「この3次元宇宙」が D_3 -ブレーンであるという「ブレーン仮説」を要請すると、私たち物質は3次元宇宙以外、すなわち余剰次元へ入り込むこともできなければ、光などによって余剰次元を知覚することもできないことになる。これが、「なぜ宇宙が3次元空間として観測されているのか」という問に対するブレーン仮説に基づく超弦理論の解答である。

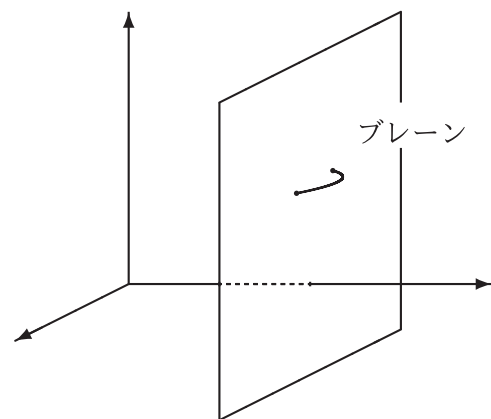


図3：ブレーンと開いた弦

3 ブレーン世界シナリオと高次元時空における重力の法則

超弦理論のエネルギースケールがあまりにも高いため、実験的には何ひとつ検証されていない。しかし、超弦理論には、究極の統一理論が満たすべき条件が十分に備わっている。いずれの場合においても、時空が高次元であることが本質的な役割を果たす。そこで、超弦理論からブレーンのアイデアだけを持ちだし、高次元時空の上で標準理論を越える物理を構築する試みが始まった。これを「ブレーン世界シナリオ」と呼ぶ[5, 6]。このシナリオでは物質の最小単位は「弦」ではなく、あくまでも「点粒子」であり、また、時空を10次元に限定せずに、 $1 + 3 + d$ 次元として仮定する。つまり、物質世界の構成要素である標準理論の素粒子とゲージ粒子を3次元のブレーンに束縛させ、重力だけはブレーンと d 次元の余剰次元双方に渡って伝播することを許す。そのため、高次元時空での物理法則を考えるならば、重力の法則を見直す必要が生じる。

3.1 時空の次元と力のべき則

一般に、空間の次元と相互作用の距離依存性（べき則）との間には密接な関係があることが知られている。力のべき則とは、力の場の強さが力の源からの距離 r の何乗に比例して変化していくのかということである。たとえば、クーロンの法則やニュートンの万有引力の法則のべき則は r^{-2} 、つまり「逆2乗則」である。このべき則は、空間が3次元であることから直接導かれる。

ガウスの法則によれば、力の源からはそのチャージ Q に比例する一定量の「場のフラックス」 $\Phi \propto Q$ が等方的に広がっていく⁴。ここで、力の源から r の位置での場の強さ $g(r)$ はその位置でのフラックスの密度として定義されるので、 $g(r)$ はその空間における半径 r の球面の表面積に反比例する。 D 次元空間における球面は $(D-1)$ 次元球面であり、半径 r のときの表面積は r^{D-1} に比例するので、

$g(r) \propto \frac{\Phi}{r^{D-1}}$ が導かれる。

3次元空間での重力の場合、質量 M の重力源からのフラックスは $\Phi \propto M$ であり、半径 r の2次元球面の表面積は $4\pi r^2$ であるから、重力場の強さ $g^{(3)}(r)$ は

$$g^{(3)}(r) = G_N \frac{m}{r^2} \tag{1}$$

となる。式(1)はニュートンの万有引力の法則であり、比例定数 G_N が万有引力定数である。つまり、万有引力の法則の逆2乗則は、空間が3次元であることを反映していた。

次に、ブレーン世界シナリオのアイデアに従って、重力のべき則を調べる。以下、ブレーンの次元を3次元、余剰次元の次元を d 次元と仮定する。ブレーンを含めた高次元空間を考えると、重力の場のフラックスだけが $3 + d$ 次元の高次元空間全体に広がり、それ以外の力の場のフラックスは3次元のブレーンだけに広がるため、重力のべき則と重力以外の力のべき則は必ずしも一致する必要はない。実際、重力以外のゲージ粒子を扱う標準理論では空間は3次元であるとして定式化され、数々の実験と高い制度で一致している。このことから、ブレーンの次元は3次元であると断定でき、クーロンの法則の逆2乗則はブレーン世界シナリオでも正しい。

一方、余剰次元のすべての d 次元がブレーンの3次元空間と同等に広がっていると仮定すると、重力のフラックスは $3 + d$ 次元の全空間を均等に伝播するため、重力の法則は(1)の代わりに、

$$g^{(3+d)}(r) = G^{(3,d)} \frac{m}{r^{2+d}} \tag{2}$$

になる。ここで、重力定数、つまり重力の強さの指標を与える定数 $G^{(3,d)}$ は3次元の万有引力定数 G_N と一致する必要はない。

3.2 コンパクト化された余剰次元

式(2)に示す重力の法則は、 $3 + d$ 次元空間全体が同

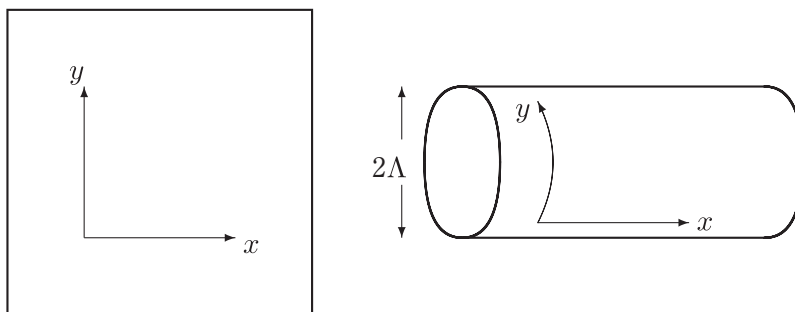


図4：2次元空間のコンパクト化

⁴クーロン力の場合は電荷、重力の場合は質量に相当する。

表 1 : 余剰次元 d における重力定数とコンパクト化のサイズ ($E_{gr} \sim 10^3 \text{ GeV}$)

余剰次元	$G^{(3,d)} [\text{N} \cdot \text{m}^{2+d} / \text{kg}^2]$	Λ [m]
$d = 1$	1.8×10^3	2.7×10^{13}
$d = 2$	3.5×10^{-16}	2.3×10^{-3}
$d = 3$	6.8×10^{-35}	1.0×10^{-8}
$d = 4$	1.3×10^{-53}	2.1×10^{-11}
$d = 5$	1.6×10^{-72}	5.2×10^{-13}
$d = 6$	5.0×10^{-91}	4.4×10^{-14}

等に広がっていると仮定して得られた。ところが、ニュートン力学では、ケプラーの法則をはじめとして重力に関するさまざまな現象が万有引力の法則 (1) の正しさを立証している。事実、重力が (2) ではなく (1) に従うことは、现阶段で、ミリメートルのオーダーまでの実験で確認されている [5]。しかし、この実験事実は余剰次元の存在を否定するものではない。余剰次元が存在していても、実験的には重力の法則が (1) として検証される可能性がある。それを示そうとすると、もうひとつの仮説を立てなければならない。それは、余剰次元が 3 次元ブレーンとは異なり、ある距離スケールよりも小さな領域にしか広がっていないという仮説である。このように、全時空のうちのいくつかの次元を Λ 程度の領域内に丸め込むことを「コンパクト化」といい、 Λ をコンパクト化のサイズと呼ぶ。図 4 にコンパクト化の 1 例を示す。ここでは、 x 軸方向がブレーンワールドに対応し、 y 軸方向が余剰次元に対応している。開いた 2 次元平面の y 軸方向がコンパクト化されている。

以下、 d 次元の余剰次元は Λ 程度にコンパクト化されているとする。重力に関する現在の実験の距離スケールは $\lambda \sim 1 \text{ mm}$ であるから、もしも $\lambda < \Lambda$ ならば $(3+d)$ 次元空間全体が見えるのだが、 $\lambda > \Lambda$ であると余剰次元は認識されず、空間は 3 次元として観測されてしまう。つまり、距離スケールがミリメートルのオーダーまでの実験で重力の法則が (1) であったという結果は、余剰次元がそれよりも小さな領域にコンパクト化されているということを示唆している。

3.3 コンパクト化のサイズと時空の次元

次に、コンパクト化のサイズ Λ を境に観測される重力の法則がどのように変化するかを調べる。ガウスの法則に立ち返ると、質量 M の重力源から重力場のフラックスが広がっていくとき、 $r < \Lambda$ まではフラックスは $3+d$ 次元全体に等方的に広がるため、その範囲での重力場は式 (2) になる。ところが、 r が Λ を越えると余剰次元にはフラックスが満たされてしまい、残りのフラックスがコンパクト化されていない 3 次元ブレーン内部だけを「2 次元球面状」に広がっていく。つまり、重力源から $r > \Lambda$ のところでの

フラックスが広がっている領域の面積 (体積) は $4\pi r^2 \times V_d$ である。ここで V_d はブレーンの各点における余剰次元の体積であり、 $V_d \sim \Lambda^d$ である。したがって、重力場の強さは $r = \Lambda$ を境に次のように変化する。

$$g_{\text{in}}^{(3,d)}(r) = G^{(3,d)} \frac{M}{r^{2+d}}, \quad r < \Lambda \quad (3)$$

$$g_{\text{out}}^{(3,d)}(r) = G^{(3,d)} \frac{M}{r^2 \Lambda^d}, \quad r > \Lambda \quad (4)$$

$r > \Lambda$ の領域はブレーン内部、つまりこの 3 次元宇宙そのものであるから、 $g_{\text{out}}^{(3,d)}(r)$ は観測されている万有引力 $g^{(3)}(r)$ に一致しなければならない。式 (4) と (1) より、重力定数の間に

$$G_N = \frac{G^{(3,d)}}{\Lambda^d} \quad (5)$$

が導かれる。ブレーン世界シナリオでは $G^{(3,d)}$ が「真の」重力定数であり、 G_N は「見かけの」ものであると解釈できることがわかった。

ところで、万有引力定数 $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ をエネルギースケールに換算すると、

$$E_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} c^2 \sim 10^{19} \text{ GeV} \quad (6)$$

のようにプランクエネルギーが現れる。これに対して標準理論のエネルギースケールは $E_S \sim 10^3 \text{ GeV}$ であり、 E_P よりも 16 桁も小さい。これは、重力だけがほかの力よりも極端に弱いことを意味する。この不自然なギャップは「プランク階層性問題」と呼ばれ、標準理論では解決できない問題のひとつであった。一方、ブレーン世界シナリオでは $G^{(3,d)} [\text{N} \cdot \text{m}^{2+d} / \text{kg}^2]$ を真の重力定数と解釈するため、

$$E_{gr} = \sqrt[2+d]{\frac{\hbar^{1+d} c^{5+d}}{G^{(3,d)}}} \quad (7)$$

を「真の」重力のエネルギースケールと考えなければならない。そこで、 E_{gr} は E_S と同程度であると仮定することができる。つまり、真の重力の強さは他の力と同程度であるのだが、重力だけが余剰次元にも逃げるため、式 (5) が示すようにブレーンに残る重力は余剰次元の体積の分だけ

見かけ上弱くなってしまうと解釈することができる[5, 6]。

以下の議論では、式(5)と(7)を用いて、

$$E_{gr} \sim E_S \sim 10^3 \text{ GeV} \quad (8)$$

を仮定しよう。私たちが、真の重力定数 $G^{(3,d)}$ とコンパクト化のサイズ、すなわち余剰次元のサイズ Λ を式(8)のもとで計算した値を表1に示す。余剰次元の次元数が大きくなるほど、重力定数の値も余剰次元のサイズも小さくなっている。 $d=1$ の場合の余剰次元のサイズは $\sim 10^{13} \text{ m}$ であり、太陽系の半径よりも大きくなってしまふ。すくなくともミリメートルのオーダーまではニュートンの重力の法則(1)の正しさが実験的に確認されている以上、 $d=1$ の可能性が排除される。また、 $d=6$ でも、そのサイズは原子核程度である。ただし、表1に示した数値は、重力場(1)、(4)と仮定(8)を用いて計算した値である。式(5)と(7)からわかるように、 $d=1$ の場合は E_{gr} が1桁上がるごとに Λ は3桁下がることかわかる。

4 AFM を用いた余剰次元検出の可能性

いよいよ、原子間力顕微鏡 (AFM) を用いて余剰次元を検出する方法について検討しよう。具体的には、2つの原子間に作用する重力を AFM によって測定することを考える。それらの原子間の距離が余剰次元のサイズよりも大きいか小さいかに応じて重力の法則が異なるため、その重力の強さを測定すれば余剰次元が存在するかどうかかわかる。

4.1 Xe-Xe 間のファンデルワールス力と重力の比較

AFM では、カンチレバの先端に取り付けた探針を試料に数 nm 以下に近づけ、探針の先端の原子と試料の原子との間に働く原子間力が一定になるようにフィードバックをかけながら試料を走査して表面形状を得ている[8]。本節では、探針の先端にキセノン Xe 原子があり、試料も Xe 原子であるとして、Xe-Xe 間の原子間力であるファンデルワールス力と重力の強さを表1を用いて計算する。

ファンデルワールス力 $F_{\text{van}} [\text{N}]$ は2つの中性の安定な原子間に作用し、その距離変化は次式で与えられる[9]。

$$F_{\text{van}}(r) = -4\varepsilon \left\{ -12 \left(\frac{\sigma^{12}}{r^{13}} \right) + 6 \left(\frac{\sigma^6}{r^7} \right) \right\} \quad (9)$$

Xe-Xe の場合、 $\varepsilon = 3.16 \times 10^{-21} \text{ J}$ 、 $\sigma = 406 \text{ pm}$ である。これは電気力であるから、式(9)は余剰次元の有無には依存しない。式(9)のグラフを図5に示した。

さて、Xe-Xe 間にはファンデルワールス力と重力が作用しているため、AFM で原子間に働く力を測定するとそ

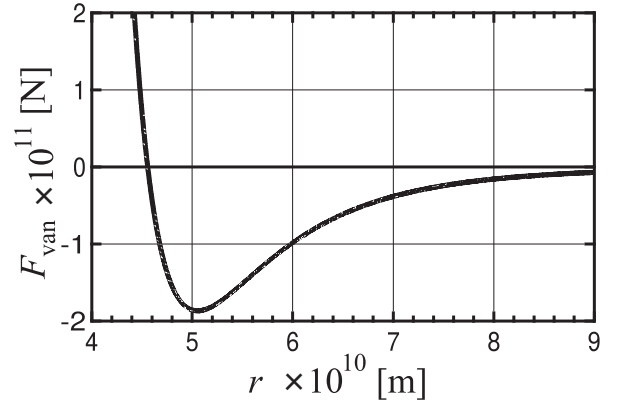


図5: Xe-Xe 間に作用するファンデルワールス力 F_{van} の距離 r の変化

の合力が測定されてしまふ。そこで、 $F_{\text{van}} = 0$ となるように原子間隔を調整すれば、重力だけが測定できるようになる。その距離を $r_0 [\text{m}]$ とすると、(9)より

$$r_0 = 4.56 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (10)$$

が求まる。

Xe-Xe 原子間の間隔が r_0 のときの重力の大きさを、余剰次元の次元数ごとに計算する。ただし、表1を見ると、 $d \geq 4$ ではコンパクト化のサイズ Λ は Xe 原子の半径 ($R_{\text{Xe}} = 2.17 \times 10^{-10} \text{ m}$) よりも小さくなってしまふため、 $d \leq 3$ までの場合に話を限る。図6に、 $d=3, 4$ での余剰次元のサイズ Λ と Xe 原子間距離 r_0 との比較を図示した。この図からもわかるように、 $d=1 \sim 3$ では $r_0 < \Lambda$ であり、Xe 原子どうしは余剰次元の中に入っていると考えられるため、重力の大きさは式(3)を用いる。つまり、Xe 原子の質量を $M_{\text{Xe}} [\text{kg}]$ とすると、 d 次元の余剰次元内での重力の強さ $F_{\text{Xe-Xe}}^{(3,d)}(r_0) [\text{N}]$ は

$$F_{\text{Xe-Xe}}^{(3,d)}(r_0) = M_{\text{Xe}} g_{\text{in}}^{(3,d)}(r_0) \quad (11)$$

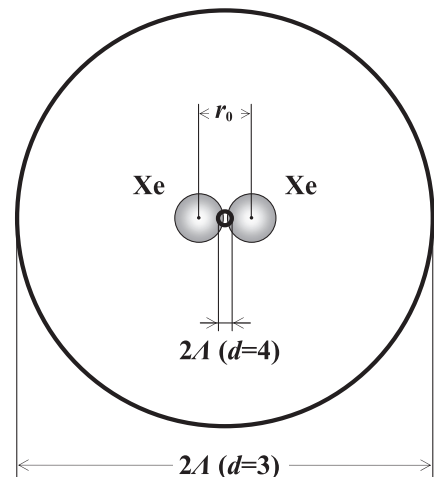


図6: Xe-Xe 原子間距離 r_0 とコンパクト化のサイズ Λ の比較

で与えられる。式 (11) に $M_{\text{Xe}} = 2.18 \times 10^{-25} \text{ kg}$ を代入して得られた値を表 2 に示す。ただし、余剰次元が存在しない通常の 3 次元空間での重力の大きさを、 $d = 0$ の場合として表に含めた。

表 2 : 余剰次元 d における Xe-Xe 間の重力

余剰次元	$F_{\text{Xe-Xe}}^{(3,d)}$ [N]
$d = 0$	1.5×10^{-41}
$d = 1$	1.9×10^{-18}
$d = 2$	1.2×10^{-27}
$d = 3$	6.9×10^{-37}

余剰次元内部の重力の大きさは、3 次元空間での重力に比べて非常に大きくなっている。しかし、カンチレバの感度が $\sim 10^{-10} \text{ N}$ であることに注意すると、重力の大きさが最も大きくなる $d = 1$ のときでさえ $\sim 10^{-18} \text{ N}$ であり、AFM で重力を検出することは難しいことがわかった。

4.2 ファンデルワールス力と重力のつり合いの位置

前節では、Xe 原子間の距離を一定に保って余剰次元における重力の大きさを求めた。ここでは、余剰次元の中で Xe-Xe 間に作用するファンデルワールス力と重力がつり合っているときの原子間距離を求める。通常は、3 次元空間における重力は極端に小さいため、重力は無視してファンデルワールス力だけを考慮し、 $F_{\text{van}} = 0$ となる距離 r_0 だけ離れて Xe 原子どうしはつり合うと見なしている。しかし、表 1 を見ると、 $d \leq 3$ のときは $r_0 < \Lambda$ であり、原子どうしは余剰次元の内部にあると考えられる。余剰次元の中では重力が強くなるため、つり合いの距離が r_0 からわずかに縮まるはずである。以下、余剰次元の次元数ごとに、その変位 Δr [m] を近似的に求める。

(i) 3 次元空間 ($d = 0$) での重力を考慮した場合：

Xe-Xe 原子が余剰次元の外部、すなわちブレーン内にあるときの変位 Δr_0 を求める。このとき、原子同士の間にはファンデルワールス力に加えて 3 次元空間での重力 (1) が作用しているから、つり合いの式は

$$F_{\text{van}}(r_0 - \Delta r_0) = M_{\text{Xe}} g^{(3)}(r_0 - \Delta r_0)$$

である。 $\Delta r_0 \ll r_0$ として Δr_0 を近似的に求めると、

$$\Delta r_0 = 1.39 \times 10^{-41} \text{ m} \quad (12)$$

が得られる。 Δr_0 はプランク長 $\lambda_p \sim 10^{-35} \text{ m}$ より 6 桁も小さい。超弦理論ではプランク長が最も短い距離スケールと考えられているため、ブレーン内部で重力を考慮することはできない。

(ii) $d = 1$ の余剰次元内部での重力を考慮した場合：

このときの原子間距離の変位を Δr_1 とする。式 (3) を用いると、つり合いの式は

$$F_{\text{van}}(r_0 - \Delta r_1) = M_{\text{Xe}} g_{\text{in}}^{(3,1)}(r_0 - \Delta r_1)$$

である。(i) と同様に、 $\Delta r_1 \ll r_0$ の近似を用いて Δr_1 を求めると、

$$\Delta r_1 = 1.65 \times 10^{-18} \text{ m} \quad (13)$$

を得る。これは、ブレーン内部 ($d = 0$) での重力よりはるかに強く、原子どうしの間隔はより縮まっている。しかし、AFM の垂直方向の検出感度は 10^{-12} m であり、それよりも非常に小さい変化を AFM で検出することは今のところ難しい。

(iii) $d = 2$ の余剰次元内部での重力を考慮した場合：

$d = 2$ の余剰次元内部に Xe-Xe が存在する場合も、これまでと同様に、変位 Δr_2 を近似計算で求めることができる。まず、つり合いの式

$$F_{\text{van}}(r_0 - \Delta r_2) = M_{\text{Xe}} g_{\text{in}}^{(3,2)}(r_0 - \Delta r_2)$$

より

$$\Delta r_2 = 1.05 \times 10^{-27} \text{ m} \quad (14)$$

となる。この変位 Δr_2 は標準理論のスケール λ_S に比べると非常に短いため、 Δr_2 を測定することは事実上不可能である。

以上の計算から、余剰次元内部での Xe 原子どうしの安定な間隔は 3 次元ブレーンにおける間隔よりも縮まっていることが確かめられた。しかし、その変位 Δr は標準理論のエネルギースケール E_S によって作られる波長 $\lambda_S \sim 10^{-18} \text{ m}$ 以下である。したがって、 Δr を測定するためには、 10^3 GeV の膨大なエネルギーを投入するほかない。

本稿では詳細は述べないが、水素原子のリュードベリ定数に対する余剰次元内部の重力の影響を概算した [7]。その影響は、 $d = 2$ のとき、リュードベリ定数の少数第 24 位に現れた。リュードベリ定数の有効数字は現在 13 桁であるから、この測定でも重力の影響を検出することは難しいと言える。

5 まとめ

宇宙を紐解く究極の理論と考えられている超弦理論は、時空の次元は 10 次元であると主張する。本論文では、その超弦理論から派生したブレーン世界シナリオに基づい

て、高次元時空を検出する可能性についての理論的な枠組みと、それを加速器のような大規模な実験装置ではなく AFM を用いて検出する方法について検討した。

まず、本論文での議論が立脚したブレーン世界シナリオを簡単にまとめておく。超弦理論の構成要素は、1次元の弦と開いた弦を閉じ込める「ブレーン」である。開いた弦の低エネルギー状態として宇宙に存在する物質が現れるという超弦理論の帰結と、3次元以外の次元を知覚できないという観測事実を考慮して、ブレーン世界シナリオでは私たちの宇宙を3次元ブレーンであると仮定する。そして、 d 次元の余剰次元を仮定して、「弦」ではなく「粒子」を扱うことで、TeV スケールの標準理論を越える物理を展開する。とくに、標準理論では扱うことができなかった重力の問題に対して、次のような興味深いアイデアが提案されている[5, 6]。真の重力の強さは他の力と同程度であるのだが、重力だけが余剰次元にも広がってしまうため、3次元のブレーンに残る重力が「見かけ上」弱くなる。このアイデアは、標準理論の未解決問題として残されていた「プランク階層性問題」に対する解決の糸口を与えている。

本論文では、このアイデアに基づき、余剰次元を検出する1つの方法として、余剰次元内部での重力の大きさを AFM によって測定することを検討した。まず、式(8)によって、真の重力のエネルギースケール E_{gr} は標準理論のエネルギースケール $E_S \sim 1 \text{ TeV}$ と同程度であると仮定した。この仮定の下で、真の重力の重力定数 $G^{(3,d)}$ とブレーンにおける見かけ上の重力定数 G_N との関係を与える式(5)を用いて、 $G^{(3,d)}$ と余剰次元のサイズ Λ を求めた(表1)。余剰次元の次元数が増えるごとに、余剰次元のサイズが小さくなる。とくに、 $d=1$ のときの余剰次元のサイズは太陽系よりも大きく、そこではニュートンの法則、すなわち逆2乗則が成り立っている。したがって、 $d=1$ の余剰次元は排除される。

次に、得られた $G^{(3,d)}$ と Λ を用いて、Xe-Xe 原子が余剰次元の中にあるときの原子間に働く重力の大きさを計算した。ただし、この重力の大きさだけを AFM で測定するために、Xe 原子間の間隔は、原子間に現れるファンデルワールス力が消える間隔 $r_0 = 4.56 \times 10^{-10} \text{ m}$ として重力の大きさを求めた。しかし、表2に示したように、最も強い重力が現れる $d=1$ の余剰次元でさえ重力の大きさは AFM で測定可能な値 $\sim 10^{-10} \text{ N}$ よりも小さい。さらに、2つの Xe 原子が余剰次元の内部で安定なつり合いの状態にあるときの原子間の距離を見積もった。この間隔と r_0 との差は $\lambda_S \sim 10^{-18} \text{ m}$ 以下であり、実験的に測定することは困難である。ただし、3.3節と4章で得られた結果はすべて式(1), (3), (4)と(8)の「仮定」にもとづいて計算されていることを強調しなければならない。それぞれ

の数値は E_{gr} のスケールが変われば大きく変わる。また、余剰次元の幾何学的構造にも大きく影響するはずである。

最後に、ブレーン世界シナリオの今後の展望について記す。さまざまな余剰次元の次元数や構造を仮定したブレーン世界シナリオのモデルで、現在実験的に到達可能な TeV スケールの新たな物理現象が議論されている[10]。たとえば、4世代目の素粒子の存在の可能性[11]、ダークマターの問題[12]やブラックホール[13]との関連など、標準理論を越えた素粒子物理学や宇宙論への応用などである。何らかの実験によって、余剰次元の存在や次元数が確認されれば、素粒子物理学に対して新たな展開が期待される。その中のひとつとして、超弦理論から導かれる時空の次元数が下がる可能性についてコメントする。現在の超弦理論では、余剰次元の次元数は $d=6$ に限定されている。しかし、リューヴィル場と呼ばれる新たな場を弦の理論に導入すると、時空の次元数が下がる可能性があることがボソンの弦理論の文脈で報告されている[14, 15]。実験的に次元数への制限が与えられると、10次元以外の超弦理論という新たな見地が開かれることも期待される。

謝 辞

図の作成を手伝ってくれた、広島工業大学大学院電気電子工学専攻戎佳宏君に感謝します。

参考文献

- [1] S. Weinberg, "Quantum Theory of Fields", Cambridge Univ. Press, 1995.
- [2] M. Green, J. Schrrarts, E. Witten, "Superstring Theory", Cambridge Univ. Press, 1987.
- [3] J. Polchinski, "String Theory", Cambridge Univ. Press, 1998.
- [4] J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges", Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724.
- [5] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, "The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter", Phys. Lett. **B429** (1998) 201.
- [6] L. Randall and R. Sundrum, "A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension", Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370.
- [7] 長尾絢, "高次元空間において電子-陽子間とキセノン原子間にはたらく万有引力の見積り", 広島工業大学電子工学科卒業論文, 2003年2月.
- [8] 例えば, K. Otani, N. Sakata, T. Ozaki and K. Kawabata, "Effects of Magnetic Flux Density and Substrate Temperature on Ni Films Prepared by Means of Unbalanced Magnetron Sputtering Assisted by

- Inductively Coupled Plasma”, *J. Phys.: Conference Series* **417** (2013) 12035-1-6.
- [9] P. Atkins and J. de Paula, “Physical Chemistry” Oxford Univ. Press, 645-698, 2002.
- [10] T. Kakuda, K. Nishiwaki, K. Oda and R. Watanabe, “Universal Extra Dimensions after Higgs Discovery”, e-prints: hep-ph/1305.1686 (2013).
- [11] M. Marionneau (The ATLAS and CMS collaborations), “Extra-Dimensions, Top-Antitop Resonances, 4-th Generation and Leptoquark Signatures at the LHC”, e-prints:hep-ex/1305.3169 (2013).
- [12] S. Arrenberg, L. Baudis, K. Kong and 11 K. T. Matchev, “Kaluza-Klein Darkmatter: Direct Ditection vis-a-vis LHC”, e-prints: hep-ph/1307.6581 (2013).
- [13] E. Winstanley, “Black Holes, TeV-scale Gravity and the LHC”, e-prints: hep-ph/1306.5409 (2013).
- [14] E. Cremmer and J.-L. Gervais, *Commun. Math. Phys.* **144** (1992) 279.
- [15] T. Suzuki, “A Note on Quantum Liouville Theory via the Quantum Group . An Approach to Strong Coupling Liouville Theory”, *Nucl. Phys.* **B492** (1997) 717-742.

