

# 複素関数の積分に対する数値積分の試み

殿塚 勲\*

(平成21年10月27日受理)

## Application of Numerical method to Complex integration

Isao TONOZUKA

(Received Oct. 27, 2009)

### Abstract

A method of numerical integration is, as a general rule, applied to a real integral, namely, integration along a real axis. In this note, a trial of application of numerical integration to complex integral is made. In several cases, we have made an error analysis of trapezoidal rule and Simpson's rule. In particular, in case of integral of complex function taken along a circle, it is shown that the error is minimized if the test points are selected at even intervals.

**Key Words:** numerical integral, complex integral, holomorphic function, trapezoidal rule, Simpson's rule, error estimation

### 1 はじめに

通常、数値積分は実数上の積分に対し行う近似計算法である。ここではそれを複素平面上の積分の値を求めるために、数値積分法を適用することを考える。複素積分には複素平面上 A 点から B 点までの経路を与えて線積分を求める場合、すなわち開いた経路上での積分値を求める問題と、閉じた経路を与えて線積分を求める場合がある。後者は実数上の積分では現れなかった問題であり、しかも Cauchy の定理や留数の定理に関連して閉曲線の場合の方が重要な応用例が多い。

ここでは複素積分に適用した数値積分の誤差を議論し、また応用例をも述べるが、複素関数は正則関数のみを扱い、いくつかの例題において複素積分を数値積分することが有効であることを示す。

### 2 数値積分の誤差

#### 2.1 台形則

まず複素平面上の A 点から B 点までの曲線 C に沿った

積分

$$I = \int_{A(C)}^B f(z) dz \quad (1)$$

において、曲線 C 上に点  $(z_0, z_1, \dots, z_N)$  をとり、各区間の積分値を  $I_k$  とおくと

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} I_k \quad \text{ここで} \quad I_k = \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z) dz \quad (2)$$

である。台形則ではこれを

$$I_k \cong (f(z_k) + f(z_{k+1})) \Delta z / 2$$

$$\text{ここで} \quad \Delta z = z_{k+1} - z_k \quad (3)$$

により近似する。このとき  $h = |\Delta z|$  とおくと

$$I_k = \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z) dz = (f(z_k) + f(z_{k+1})) \Delta z / 2 - \frac{\Delta z^3}{12} f''(z_k) + O(h^4) \quad (4)$$

となるが、この誤差評価は実数関数の積分の場合と同様である。

\* 広島工業大学情報学部知的情報システム学科

## 2.2 中点則

$I_k$  に対する近似として

$$I_k \cong f\left(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}\right) \Delta z \quad (5)$$

が中点則である。複素積分では中点則では  $\frac{z_k + z_{k+1}}{2}$  における関数値を用いるので一般には積分路上ではない点での関数値を用いることになり、本来の数値積分の公式としては好ましくない。しかしながら点  $z_k$  を密にとればそのような違いは無視できることが期待される。

$$I_k = \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z) dz = f\left(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}\right) \Delta z + \frac{\Delta z^3}{24} f''(z_k) + O(h^4) \quad (6)$$

から分かるように中点則の精度は台形則より高くなり、これらは次の例に対する数値実験でも確かめられた。

### 2.2.1 『例 1』

$$I = \int_{A(C)} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \left[ \frac{1}{2i} \log \frac{1 - iz}{1 + iz} \right]_A^B \quad (7)$$

ただし  $A=0, B=2+2i$

ここで積分路は曲線と直線の 2 種類を選ぶこととする。<sup>[2]</sup>

積分路 1  $C_1 : z(t) = t + i \frac{t^2}{2} \quad (0 \leq t \leq 2) \quad (8)$

積分路 2  $C_2 : z(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq 2) \quad (9)$

台形則と中点則の全区間では  $\Delta z$  を一定値  $\Delta z = h$  とおくと誤差は  $h^2$  に比例することが期待されるので

$$E \sim Kh^n \quad K, n \text{ は定数} \quad (10)$$

とおき、パラメータ  $K, n$  を最小二乗法で決めると表 1 のような結果となった。このとき誤差について特徴的なことは  $(h, E)$  を両対数グラフに描くときれいな直線になることである。これは後の例でも示される。その傾き  $n$  はいずれも 2 を示していたが、これは積分路  $C_1$  でも  $C_2$  で

『例 1』 (積分路 1)	K	n
台形則	0.16	2.0
中点則	0.085	2.0
『例 1』 (積分路 2)		
台形則	0.015	2.0
中点則	0.0084	2.0
『例 2』 (積分路 1)	K	n
台形則	2.07	2.0
中点則	1.04	2.0
『例 2』 (積分路 2)		
台形則	1.31	2.0
中点則	0.655	2.0

表 1 台形則・中点則の誤差

も同様であり、また実数積分の場合と同じである。

### 2.2.2 『例 2』

$$I = \int_{A(C)} e^z dz = e^B - 1 \quad \text{ただし } A=0, B=2+2i \quad (11)$$

例題 1, 例題 2 を通して中点則と台形則では  $n=2$  は全く同じであるが、(10)式 K の値は台形則は中点則に比較して 2 倍である。これは(4)式と(6)式にも現れている。

## 2.3 Simpson 則

Simpson 則は関数を 2 次曲線で近似するのでその近似ユニットは 2 区間分となる。

$$I = \sum_{k=0, \text{even}}^{N-1} I_k$$

$$\text{ここで } I_k = \int_{z_k}^{z_{k+2}} f(z) dz \quad (12)$$

Simpson 則では  $k, N$  は偶数であり、実数の Simpson 則では

$$I_k \cong (f(z_k) + 4f(z_{k+1}) + f(z_{k+2})) (z_{k+2} - z_k) / 6 \quad (13)$$

となるが、複素関数では点は経路 C 上  $(z_0, z_1, \dots, z_N)$  に点を選ぶので、このような形にはならず

$$I_k \cong (f(z_k) + 2f(z_{k+1})) (z_{k+1} - z_k) / 3 + (2f(z_{k+1}) + f(z_{k+2})) (z_{k+2} - z_{k+1}) / 3 \quad (14)$$

となる。この公式では関数値は線分上でとっているが、積分路 C が曲線のときは精度は台形則と同じ程度にとどまり、誤差は  $h$  の 2 乗に比例する。実数の Simpson 則では  $h$  の 4 乗に依存する筈であるが、(14)でも積分路 C が直線であれば  $h$  の 4 乗に比例する。

(13) の代わりに

$$I_k \cong (f(z_k) + 4f\left(\frac{z_k + z_{k+2}}{2}\right) + f(z_{k+2})) (z_{k+2} - z_k) / 6 \quad (15)$$

を用いると例題 (1) (2) でも示されるように誤差は  $h^4$  あるいはそれ以上の精度となる。但し(15)は関数値  $f(z_{k+1})$  は用いず一般には曲線 C 上ではない点  $\frac{z_k + z_{k+2}}{2}$  の関数値を用いるという欠点をもつ。

実数関数の場合、台形則では誤差は  $h^2$  に比例し Simpson 則では  $h^4$  に比例するという事は、Simpson 則を導くにあたり 3 点  $(z_k, z_{k+1}, z_{k+2})$  が一直線上にあるという事実を利用しているのである。なお台形則の(4)と(6)の誤差項を比較すると、 $((4) + 2(6)) / 3$  を計算すれば、さらにより精度が得られることが分かるが (Romerg 積分法),

『例 1』(積分路 1)	K	n
Simpson 則 (14) 式	0.17	2.0
Simpson 則 (15) 式	0.0725	4.0
『例 1』(積分路 2)		
Simpson 則 (14) 式	0.409	5.03
Simpson 則 (15) 式	0.409	5.03
『例 2』(積分路 1)	K	n
Simpson 則 (14) 式	1.4	2.0
Simpson 則 (15) 式	0.498	3.98
『例 2』(積分路 2)		
Simpson 則 (14) 式	0.175	4.0
Simpson 則 (15) 式	0.175	4.0

表 2 Simpson 則の誤差

これは Simpson 則 (15) と同じものである。

複素積分に対する数値積分では、積分路が曲線(曲がっているとき)では Simpson 則のような 2 次の公式、あるいはそれ以上の高次の公式は作っても精度は台形則のみになる。

### 3 閉曲線に沿った積分に対する数値積分

閉じた曲線 C に沿う複素線積分

$$I = \oint_C f(z) dz \quad (16)$$

に対する数値積分を考えよう。ここで C は円に限ることにする。これを数値積分により近似する場合、円に沿った積分であれば上端も下端もない。数値積分の台形則ではすべての点での重みが同じであるのに対し、Simpson 則や更に高次の公式では点により重みが異なるのは、積分の上端・下端からの効果を補償するためである。よって上端・下端のない円の沿う積分では台形則のみを考える。<sup>[1]</sup>

円 C 上に等間隔に N 個の点

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}, \text{ ただし } z_N = z_0$$

をとる。数値積分では (16) を

$$I \cong \sum_{k=0}^{N-1} (f(z_k) + f(z_{k+1})) \frac{z_{k+1} - z_k}{2} \quad (17)$$

により近似する。

この近似式は台形則であるから、誤差は基本的に  $h^2$  に比例する筈である。

#### 3.0.1 『例 3』

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \text{積分は原点を中心とする単位円 (18)}$$

【積分法 1.】(17) の適用

誤差に対し(10)式をあてはめると、 $K=2.61$ ,  $n=1.97$  となったが、 $10^{-10}$  程度の精度を得るのにきざみ数  $N=10^6$  にする必要があった。

#### 【積分法 2.】極座標による計算

一方複素関数論でよく用いられる  $z$  から極座標への変数変換

$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (19)$$

を行い

$$I = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta \quad (20)$$

(20) に台形則を適用してみる。

$$I \cong \sum_{k=0}^{N-1} f(z_0 + re^{i\theta_k}) rie^{i\theta_k} \Delta\theta \quad (21)$$

ここで

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \quad \theta_k = k\Delta\theta \quad (22)$$

である。『例 3』に (21) を適用すると、

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{rie^{i\theta_k}}{re^{i\theta_k}} \Delta\theta = \sum_{k=0}^{N-1} i \Delta\theta = 2\pi i \quad (23)$$

となり誤差はなくなる。すなわち通常の極座標変換(19)により、誤差は  $h^2$  依存からいきなり 0 になってしまった。これは偶然のことであろうか。

『例 3』は変換 (19) を行うと被積分関数は定数となる特別な例であったが、一般には  $\theta$  の周期  $2\pi$  の周期関数である。よって Fourier 展開

$$f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} \equiv F(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\theta} \quad (24)$$

が可能である。区間  $[0, 2\pi)$  を N 等分して台形則を適用し、その結果を上 Fourier 係数で表すと

$$\sum_{k=0}^{N-1} F(\theta_k) \Delta\theta = I + c_{-N} + c_N + c_{-2N} + c_{2N} + \dots \quad (25)$$

となるが、 $I = c_0$  であり、その次の項以降は aliasing による項であり、これが台形則に対する誤差となる。すなわち周期関数を一周期にわたって積分するとき、台形則を適用するとその誤差は Fourier 係数

$$E = |c_{-N} + c_N + \dots| \cong |c_{-N}| + |c_N| \quad (26)$$

により表わされる。

一般に Fourier 係数は関数  $F(\theta)$  が  $C^0$  級であれば  $O(1/N^2)$  の速さで 0 に近づき、 $C^1$  級であれば  $O(1/N^3)$  で近づくことが知られる。正則関数では  $F(\theta)$  は何回でも連続微分可能であるから  $C^\infty$  級であり、このとき Fourier 係数は任意の  $p > 0$  に対して  $O(1/N^p)$  よりも速く 0 に近づくことが知られている。このようなきざみ数  $N$  に対する数値積分の誤差(26) は

$$E \sim B \exp(-aN) = B \exp\left(-\frac{A}{h}\right)$$

$$A, B, a \text{ は定数} \quad (27)$$

により支配されることが多い。この形は台形則や Simpson 則よりも、 $N$  とともにはるかに速く 0 になる。

『例 3』の場合には極座標変換により被積分関数が定数なので誤差は 0 となるが、上の一般論は以下の例題で利用する。

#### 4 実積分への応用

##### 4.0.2 『例 4』

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi \quad (28)$$

##### 【積分法 1.】 実数の範囲での積分

このような区間  $(-\infty, \infty)$  にわたる積分ではきざみ幅を一定にして台形則を適用するのが最もよい精度を得る<sup>[1]</sup>ことが知られる。そこで精度  $\varepsilon$  でこの数値積分するために(28)を有限区間  $[-R, R]$  の積分に置き換え、 $R$  の値を評価する。

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) \frac{1}{x^2+1} dx &= 2 \int_R^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \\ &< 2 \int_R^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{R} = \varepsilon \end{aligned}$$

積分を  $R=2/\varepsilon$  で打ち切れば  $\varepsilon$  の精度で得られるが、もし  $\varepsilon=10^{-10}$  とすると  $R=2 \cdot 10^{10}$  となる。これではコンピュータの利用を前提とした数値積分といえども多過ぎる分点数である。

そこで関数の減衰を速めるために変換

$$x = \sinh(u)$$

が考えられるが、さらに高橋・森<sup>[3]</sup>の提唱した 2 重指数関数変換

$$x = \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right) \quad (29)$$

が積分の分点数を最小化し、かつ精度も最適な変換であることがよく知られている<sup>[1]</sup>。このとき (28) は

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh u}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right)} du \quad (30)$$

となり、 $\varepsilon=10^{-10}$  の精度を得るために  $u$  の上限は  $R=3.6$  で打ち切ることができる。

実際、きざみの数は 25、 $\Delta u=0.3$  で精度  $10^{-11}$  が得られた。

##### 【積分法 2.】 複素積分の利用

以上は (28) の積分値を実数積分の範囲で精度よく求める方法であるが、これに複素積分を利用して求めるときには関数

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad (31)$$

の上半平面の極  $z=i$  を囲む閉曲線

$|z-i|=1$  に沿った複素積分を極座標変換して行う。通常は極  $z=i$  における留数が求めるわけであるが、ここでは直接に数値複素数値積分による。

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z^2+1} dz \quad (32)$$

誤差は大体  $h^2$  に比例するので(17)式を適用したとき (10)式をあてはめると、 $K=1.32$ 、 $n=1.98$  となり、 $10^{-10}$  の精度を得るのにきざみ数  $N=10^6$  にする必要があった。これはかなり多いきざみ数である。このときの誤差ときざみ幅 (E vs h) を両対数グラフに描いたのが《図 1》である。

##### 【積分法 3.】 (21) の適用

(21) を適用して誤差に(27)を当てはめると、 $B=9.33$ 、 $A=4.42$  が得られた。ここできざみの数  $n=36$  で精度  $10^{-10}$  となり、【積分法 2.】に比較して(21)の効率ははるかに良いことが分かる(《図 2》は片対数)。また【積分法 1.】でおこなった 2 重指数変換による方法と比較しても効率よく、かつ精度よく計算ができた。

##### 4.0.3 『例 5』

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.22144146909183 \quad (33)$$

##### 【積分法 1.】 2 重指数関数変換 (29) を用いる方法

これに 2 重指数関数変換 (29) を適用し

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(u)\right) \cosh(u)}{\sinh^4\left(\frac{\pi}{2} \sinh(u)\right) + 1} du \quad (34)$$

$u=[-R, R]$  の有限区間で積分に置き換えると、 $10^{-10}$  の精度とすると  $R=2.6$  となり、きざみ数  $n=75$  であった。

##### 【積分法 2.】 複素積分の利用

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz \quad C: |z - \frac{i}{\sqrt{2}}| = 1 \quad (35)$$

を計算する。ここで  $C$  は上半平面の 2 つの極  $\exp(i\frac{\pi}{4})$ 、 $\exp(i\frac{3\pi}{4})$  を含むように選んでいる。

(17)の台形則を適用し、誤差に対し(10)式をあてはめると、 $K=0.598$ 、 $n=1.91$  となったが、 $10^{-11}$  の精度を得るのにきざみ数  $n=10^6$  にする必要があった。(《図 3》)

##### 【積分法 3.】 (21) の適用

極座標変換を行い、これに台形則を適用した(21)を用い、誤差に(27)を当てはめると、 $B=4.16$ 、 $A=2.19$  が得られた。(《図 4》)ここできざみの数 70 で精度

$10^{-10}$  となり、(17)の適用に比較して(21)の効率が良いことが分かる。

しかし『例4』に較べてAの値が小さく、したがって高い精度を得るにはきざみの数も大きくとる必要がある。【積分法1.】の2重指数関数変換公式と同じきざみの数で精度  $10^{-10}$  が得られた。

4.0.4 『例6』

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \sin \theta} d\theta = 2\pi \left(4 - \frac{7}{\sqrt{3}}\right) = -0.260449870560705 \quad (36)$$

【積分法1.】直接台形則を用いる方法

(36)の被積分関数は周期  $2\pi$  の周期関数であるから、これに直接台形則を適用する。きざみ数  $n=24$  で10桁の精度が得られた。

【積分法2.】(17)の適用  
変数変換

$$z = re^{i\theta} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

を行い、複素積分

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 + 4iz - 1)} dz \quad (37)$$

を求める。

誤差に対し(10)式をあてはめると、 $K=0.13$ 、 $n=2.00$  となったが、 $10^{-10}$ の精度を得るのにきざみ数  $2.6 \times 10^5$  にする必要があった。(《図5》)

【積分法3.】(21)の適用

誤差に(27)を当てはめると、 $B=113$ 、 $A=8.34$  が得られた。ここできざみの数22で精度  $10^{-10}$  となり、(17)の適用に比較して(21)の効率ははるかに良いことが分かる。(《図6》)

同じ精度を得るために(36)に直接に台形則を適用する場合とほぼ同じ積分の分点数であった。

5 代数方程式の根への応用

$$f(z) = 0 \quad (38)$$

を解く問題に関連して

$$I_0(C) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (39)$$

を考える。偏角の原理より  $I_0(C)$ の値は閉曲線Cの内部の方程式の根の数である。また

$$I_1(C) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (40)$$

の値は閉曲線Cに含まれる根の和である。

したがってCを選びながら  $I_0(C)=1$  のときの  $I_1(C)$  を求めればそれが方程式の根となる。

5.0.5 『例7』

$$f(z) = z^5 - z^4 - 12z^3 + 66z^2 - 104z + 80 = 0 \quad (41)$$

代数方程式(41)の根を求めるために、次の表3のような積分路について  $I_0(C)$  と  $I_1(C)$  を計算した。このうち  $I_0(C)$  の値は整数であることがあらかじめ分かっている。また方程式の係数が実数なので、複素根は共役複素数であることも既知である。

$C_1, C_2, C_3$  について計算を行うと、 $I_0(C)$ の値が2, 4, 5で増えることは  $|z|=2$  の内部に2個、 $|z|=4$  と  $|z|=2$  の間に2個の根があることである。また  $|z|=6$  と  $|z|=4$  の間には1つの根があり、しかもその根は  $I_1(C_3) - I_1(C_2) = -5$  により計算できる。

積分路番号	積分路	$I_0(C)$	$I_1(C)$
$C_1$	$ z =2$	2	2.0
$C_2$	$ z =4$	4	6.0
$C_3$	$ z =6$	5	1.0
$C_4$	$ z+5 =1$	1	-5.0
$C_5$	$ z-1-i =1$	1	1.0+1.0i
$C_6$	$ z-2-2i =1$	1	2.0+2.0i

積分路  $|z+5|=1$  の結果はその確認である。(《図7》)

積分路  $C_5: |z-1-i|=1$  の結果より  $z=1.0+1.0i$  が根であり、その共役複素数  $z=1.0-1.0i$  も根となる。同様に積分路  $C_6: |z-2-2i|=1$  の結果より  $z=2.0+2.0i$ 、 $z=2.0-2.0i$  が根となり、5つの根すべてを求めることができた。(《図8》)

6 終わりに

複素関数の積分に対し数値積分を試み、その精度・誤差を調べた。実数関数に対して行われる台形則や Simpson 則を複素積分に対しても行ったが、その誤差は曲がった線分に対しては基本的にきざみ幅を  $h$  とすると  $h^2$  に比例することが分かった。台形則の誤差は  $h^2$  に比例するのは当然であるが、Simpson 則でも3点を直線上にとらないと  $h^4$  ではなしに  $h^2$  に比例する。

閉じた曲線では特に円だけを取り上げたので台形則に限るが、このとき極座標に変換するかしないかで大きな違いがでる。極座標に変換せず元のカルテシアン座標の場合は円は曲線であり誤差は  $h^2$  に比例し、高精度は得られない。しかし極座標に変換するについては実数での積分となり通常の実数積分における台形則の最良性が現れるのである。



周回積分に対し、極座標に変換することは通常もよく行われることであり、その応用範囲は広い。ここでは通常は留数定理により求めている定積分を複素積分で計算すること、また代数方程式の解法への応用を試み満足すべき結果を得た。

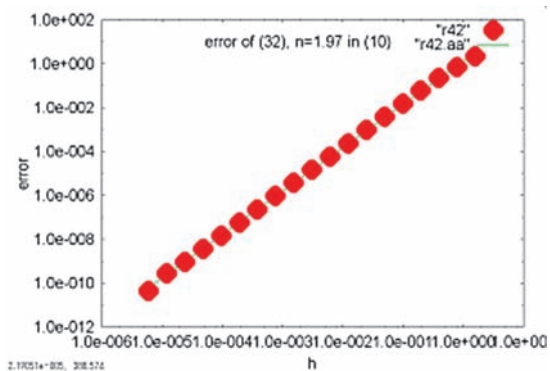
この方法は代数方程式だけではなく、一般の関数を含んだ方程式に対しても適用が可能である。特に Newton 法と比較してよりグローバルな解の探索が可能であることが有利である。

なお C 言語も C99 規格<sup>[4]</sup>においては複素数型も使える

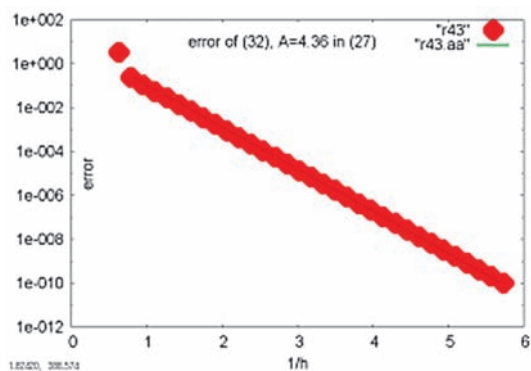
ので、複素数を含む数値計算も容易になった。ここであげたいくつかの例では Linux 上の C99 コンパイラを用いて計算を行った。

### 参考文献

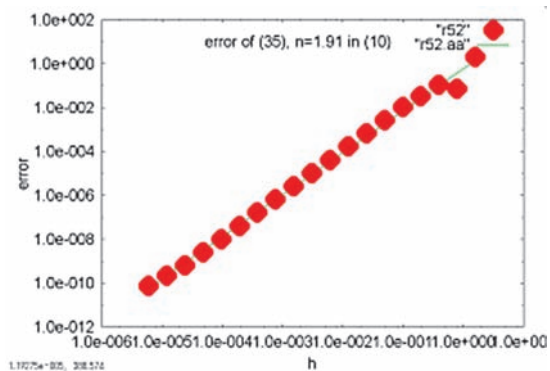
- [1] 森正武, 数値解析と複素関数論, 筑摩書房 (1975.7)
- [2] 殿塚勲・河村哲也, 理工系の複素関数論, 東京大学出版会 (1999.10)
- [3] 数値積分による特殊関数の計算, 京大数理解析研究所講究録, 149(1972), p130-145
- [4] 戸川隼人, ザ・C99, サイエンス社 (2006.12)



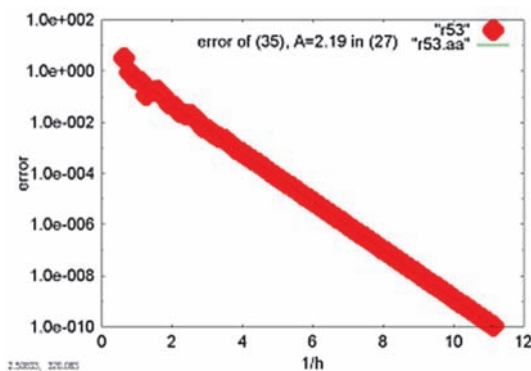
《図1》『例4』積分法2



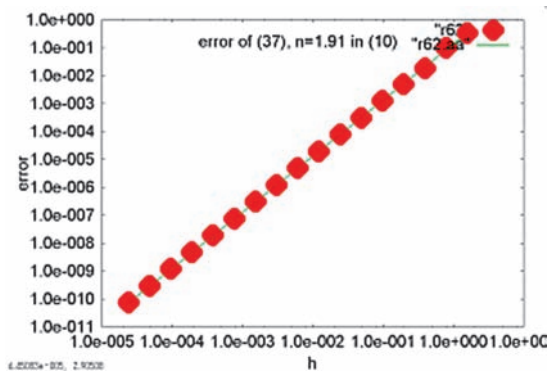
《図2》『例4』積分法3



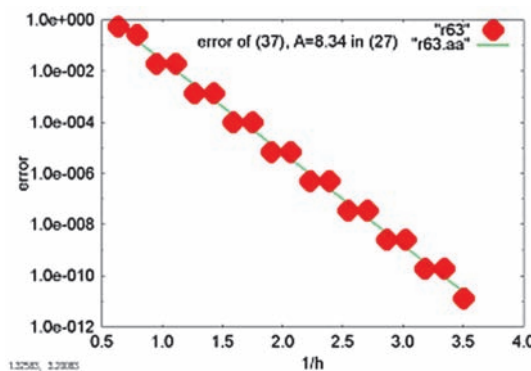
《図3》『例5』積分法2



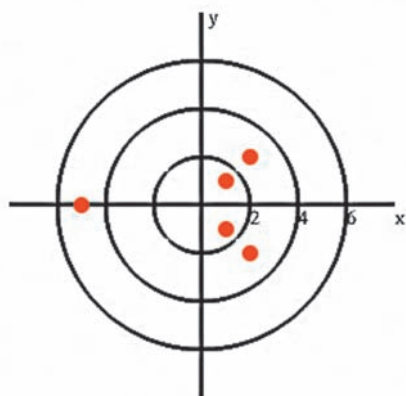
《図4》『例5』積分法3



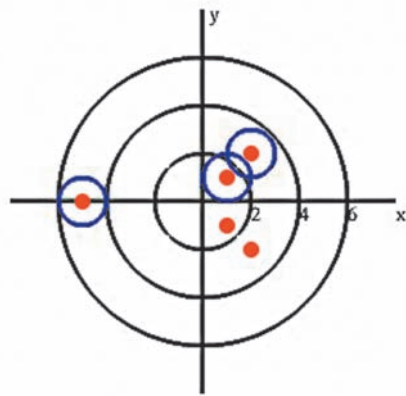
《図5》『例6』積分法2



《図6》『例6』積分法3



《図7》『例7』積分路1, 2, 3



《図8》『例7』積分路4, 5, 6

