

準正多面体の構成と色の塗り分け

殿塚 勲*・藤原 祥史*・吉田 政春*

(平成21年10月27日受理)

Construction and Coloring of Semi-Regular Polyhedrons

Isao TONOZUKA, Yoshifumi FUJIWARA and Masaharu YOSHIDA

(Received Oct. 27, 2009)

Abstract

This paper deals with the coloring of semi-regular polyhedrons. The famous four-color theorem comes into effect for this type of polyhedrons as well as the 2-dimensional maps.

The semi-regular polyhedrons are constructed from regular polyhedrons by means of such operations as truncation. In the course of the constructions of semi-regular polyhedrons from regular polyhedrons, a careful observation leads us a finding of coloring of the semi-regular polyhedrons by use of minimum kind of colors.

This method is global, whereas our proposal in the previous report is local.

Key Words: semi regular polyhedron, global coloring, four-color theorem, regular polyhedron

1 はじめに

前回の報告^[1]では正多面体の塗り分けを、隣の面同士が同じ色にならないように色を選ぶことを試みた。この際、有名な4色定理^[2]により多くとも4色で塗り分けができることを前提とし、使われる色の種類が最小になるように決めた。その結果

正4面体	4色
正6面体	3色
正8面体	2色
正12面体	4色
正20面体	3色

が塗り分けの最小の色の種類であることを示した。

そこでは隣同士の面が同じ色にならないように塗り分けるアルゴリズムを提案したが、それはある面の色を仮定して隣の面同士が異なるように順々に決めて全体の面の色を決めてゆくもので、いわば局所的な(ローカルな)色の塗り分け方法である。したがって順々に色を決めてゆき最後

の段階になって4色以内で塗り分けが不可能になったり、あるいは更により解の存在を知る場合もある。

ここでは準正多面体の塗り分けを取り上げる。準正多面体はアルキメデスの多面体とも呼ばれ^[5]

- (i) 有限個の多角形で囲まれた凸多面体である。
- (ii) 各面はすべて辺の長さが等しい正多角形から成る。ただし正多面体は除く。
- (iii) 各頂点での多角錐はすべて、合同である。の条件を満たす。

準正多面体を構成するにはすべて正多面体から出発する。正多面体から準正多面体を得るには^[5]

- (1) 切隅
- (2) 中央切り
- (3) 二重切り
- (4) 削辺
- (5) 振り切り

の5種類の操作をしながら構成してゆく。

上の操作をしながら準正多面体を構成するその途中過程

* 広島工業大学情報学部知的情報システム学科

を観察しながら各面の色の塗り分けをしてゆくと、色の塗り分けの全体像が理解しやすく、色の種類の最小解にたどりつくことが分かった。

この方法によればグローバルな見地から色の塗り分けができ、かつ色の種類が最小であることの見通しを直観的に理解できることがよい点である。ここで得られた塗り分けが色の種類の最小解であるかどうかを判断することは一般には難しい。ここでは、準正多面体に含まれる頂点や辺、多角形の関係が図14の6種類のどのタイプを含むかにより塗り分けの色の最小種類を判別した。

なお多面体の名称であるが、頂点の回りをどのような正多角形で構成しているか、により名づけることにする。例えば正6面体の1つの頂点は3つの正四角形でできているので正6面体は444である。正多面体はすべてこのような表記の仕方が可能であり正4面体は333、正8面体は3333、正12面体は555、正20面体は33333である。

準正多面体もこのような表記法が可能であり、それは準正多面体の条件(iii)による。例えば388、566、3434等がある。なお正多面体は5種類であり、準正多面体の種類は13である。但し異性体を入れると16種類という見方もあるがここでは基本的な13種類の準正多面体を取りあげる。

2 正多面体から準正多面体を作る過程

2.1 「切隅」操作による準正多面体の構成

正多面体の各辺上に2点を選び、各面が正多角形になるようにして残りの隅の部分を取り除くことにより多面体を作る。出発点としては5種類すべての正多面体を選ぶことができる。例として立方体444から出発して準正多面体388を構成する過程を図1(1)(2)(3)(4)に示す。

2.1.1 正6面体の「切隅操作」による準正多面体388の形成 (444==>(切隅)==>388)

正6面体(立方体)の1つの面の各辺に2点ずつ点を選び、これらを結ぶと正8角形になるように点を決める(図1(1))。これを各面について行い6つの正8角形の色を正6面体の塗り分けを行ったと同様に行うと3色で可能である(図1(2))。

余った8つの頂点部分の切隅をするとその切り口は正3角形であり、これら8つの正3角形を第4色で塗れば(図1(3))、6つの正8角形と8つの正3角形とは隣同士には同じ色は現れず、しかもこれが最小の種類の色による塗り分けとなる(図1(4))。

388の塗り分けには4色必要。図1(5)は388を2次元に射影した図[1]であり、立体の裏も見え、かつ隣同士の色が異なることが見てとれるが、面の数は射影のために

1面だけ少ない。

388の塗り分けに4色が必要であることは、図14(4)タイプDとの比較からこれが最低の色の数であることが分かる。

2.1.2 正6面体以外の正多面体の「切隅操作」による準正多面体の形成

333==>366

図2(1)は正四面体から切隅操作で366を作った結果であり、正四面体自身の塗り分けには4色必要であり、2次元射影図の図2(2)からわかるように366でも4色となる。

3333==>466

図3(1)は正八面体から切隅操作で466を作った結果である。正八面体は2色で塗り分けができるが、切隅操作で切り口はその2色とは異なる色が必要なので、466では3色が図3(2)必要となり、図14(1)タイプAまたは図14(5)タイプEよりこれが最小の色の種類である。

555==>31010

正12面体の塗り分けにはもともと4色が必要であり、切隅操作してできた31010でも4色を要する。(図4(1), 図4(2)) 図14(4)タイプDより4色が最小である。

33333==>566

正20面体の塗り分けは3色でできるが、切隅操作してできた切り口は3色すべてと面が隣り合わせになるので、4色が必要となる。(図5(1), 図5(2)) 4色は図14(6)タイプFより最小である。

2.2 「中央切り」操作による準正多面体の構成

切隅では1辺を3つの部分に分割しているが、さらに切り込みを深くして各辺の中点を結んだ線を結ぶ。

444==>3434

正方形の各辺の中点を結ぶと、各面には面積が半分で45度回転した正方形が現れる。これらの面は点以外では接していないので同じ色で塗りつぶすことができる。(図6(1), 図6(2))

切隅された残りの断面は3角形であり、これも第二の色で塗りつぶすと3434は2色で塗り分けが可能である。(図6(3), 図6(4)) 実際、各頂点は図14(2)タイプBだけから成り立つ。

図6(5)は3434の2次元射影図である。

555==>3535

図7(1)は正12面体(555)から中央切りにより作った3535である。その作り方は上の3434とほぼ同様であ

る。各頂点は図 14(2)タイプ B だけから成り立ち、2色で塗り分けが可能である。

図 7(2)は 3535 の 2次元射影図。

2.3 「二重切り」操作による準正多面体の構成

444==>468

立方体(444)の各面に元の面の2倍の角の正多角形を描く。立方体(444)から出発するので各面に8角形が6個できるが、隣の面との間で出来る平行部分が正方形になるように各辺の切り込みを調節し、同時に立方体の頂点を切り込んでその断面が正六角形にすることができる。(図8(1)図8(2)図8(3))

こうして6面の8角形を第1色、立方体の辺と同じ個数の12面の正方形を第2色、立方体の頂点と同じ枚数の正六角形は第3色で塗りつぶせば、それらの面は接していないので、3色で塗り分けができる。(図8(4))各頂点は図14(1)タイプ A または図14(5)タイプ E から成り立つので最小種類は3色となる。図8(5)は 468 の 2次元射影図。

555==>4610

正12面体の5角形の各面内に正10角形を描き、隣の面の5角形との平行線が正方形になるようにする。同時に正12面体の各頂点の切り口が正六角形になるようにすると準正多面体 4610 ができる。

色の塗り分けは上の 468 と同様に 3色でできる。図 9(1)

図 9(2)は 4610 の 2次元射影図。

2.4 「削辺」操作による準正多面体の構成

444==>3444

立方体(444)の各面に元の面よりも小さい面(正方形)を描き第1色で塗りつぶす。図10(1),図10(2)

その大きさは隣の面上の正方形との間でできる平行線で囲われた部分が正方形になるように選ぶ。こうして辺を削除してできた正方形には第2色を塗る。図10(3)

残りは立方体の頂点を切開した3角形部分が8個できるがこれは辺を削除してできた正方形と隣どうしではあるが、はじめに描いた平行線とは隣接していないので、第1色で塗りつぶす。図10(4)。

図10(5)は 3444 の 2次元射影図。各頂点は図14(2)タイプ B から成り立ち2色で塗りつぶしが可能である。

555==>3454

正12面体の5角形の各面内により小さな正5角形を描き、第1色で塗りつぶす。隣接する5角形の平行線

で囲われた部分は正方形になるようにしてこれには第2色を塗る。正12面体の20個の頂点を切開してできた3角形部分のはじめの正5角形とは隣接していないのでこれと同じ第1色で塗りつぶす。図11(1)

3444と同様に各頂点は図14(2)タイプ B から成り立ち2色で塗りつぶしが可能である。図11(2)は 3454 の 2次元射影図。

2.5 「振り切り」操作による準正多面体の構成

444==>33334

立方体の各面内により小さな正方形を振って配置する。^[5] ^[6] その配置はその正方形の回りに2つの正三角形を通じて隣の正方形につながるように位置を決める。結果的には正方形の隅の周りに4つの正三角形が回り込むように配置される。

各頂点は図14(3)タイプ C から成り立ち3色で塗りつぶしが可能である。振り切りは5種類の操作の中で最も複雑である。

図12(5)は 33334 の 2次元射影図。

555 ==> 33335

正12面体 555 の正5角形の各面上に小さな5角形を配置し、その正5角形の隅の周りに4つの正三角形が回り込むように配置される。

33334と同様に各頂点は図14(3)タイプ C から成り立ち3色で塗りつぶしが可能である。

図13(2)は 33335 の 2次元射影図。

3 終わりに

13種類の準正多面体のすべてに対し最小の色の数での塗り分けを行った。^[1]とは異なり、見通しよくグローバルに面の色を決めることができた。さらに得られた結果が最小の色の数であるということは頂点や多角形の構造から図14のタイプ A, B, C, D, E, Fなどに分けた各タイプにあてはめて確認ができた。すべての準正多面体は Zalgaller の多面体^[3]と呼ばれる 92 種類の多面体に含まれ、その頂点座標などのデータは^[4]により計算され公開されている。ここでは13種類の準正多面体の頂点座標などのデータはこれによらず、ここで述べたような正多面体からの構成により求めたものである。

我々は準正多面体を正多面体から構成する過程をすべて3次元グラフィックスで作成したが、これは準正多面体の構造を学ぶためのよい教育用教材になると考えている。

参考文献

[1] 殿塚勲・村上智秋, 多面体の塗り分け, 広島工業大学紀要, 第43巻 pp331-337 (2009)

- [2] ロビン・ウィルソン, 茂木健一郎訳, 四色問題, 新潮社 (2004.11)
- [3] 関口次郎, 多面体の数理とグラフィックス, 牧野書店 (1996.2)
- [4] 小林光夫・鈴木卓治「正多角形を面にもつすべての凸多面体の頂点座標の計算」電気通信大学紀要, 第5巻 (1992) ,p147-184
- [5] 一松信, 正多面体を解く, 東海大学出版会 (1983.6)
- [6] 阿原一志, 数理科学, NO.362, pp54-59 (1993), NO.363, pp59-65 (1993)

切隅操作による準正多面体の構成

444 ==>388

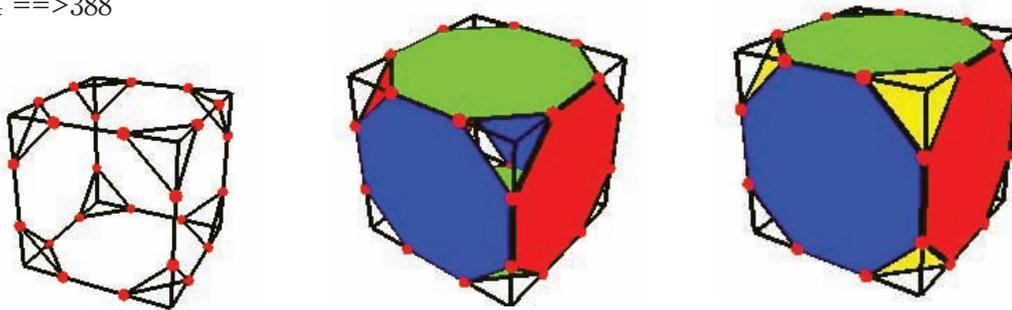


図 1 (1)

図 1 (2)

図 1 (3)

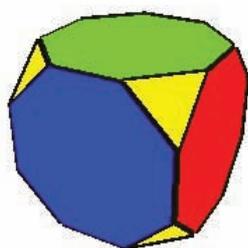


図 1 (4) 388

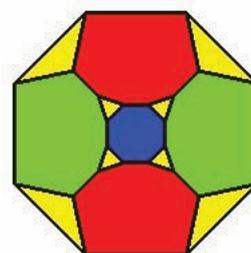


図 1 (5)388の2次元射影図

333==>366

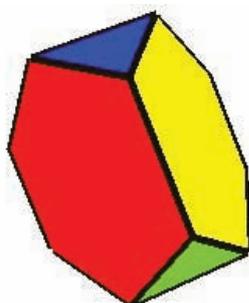


図 2 (1) 366

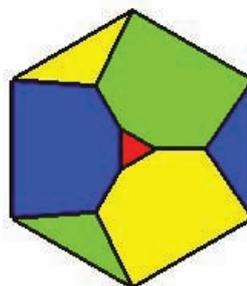


図 2 (2) 366の2次元射影図

3333==>466

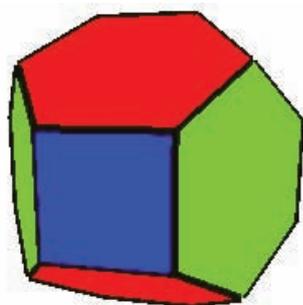


図 3 (1)466

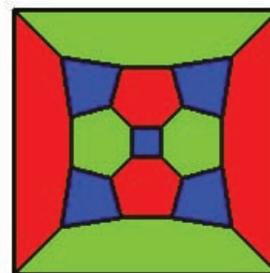


図 3 (2)466の 2 次元射影図

555==>31010

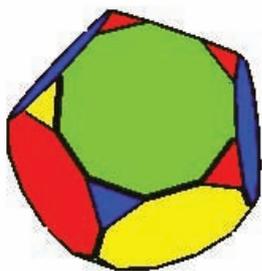


図 4 (1) 31010

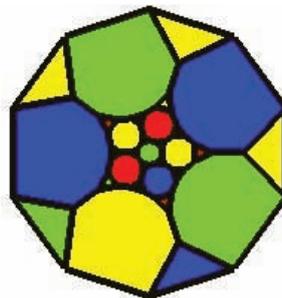


図 4 (2) 31010の2次元射影図

33333==>566



図 5 (1) 566

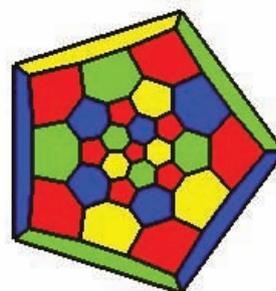


図 5 (2) 566の2次元図

中央切操作による準正多面体の構成
444==>3434

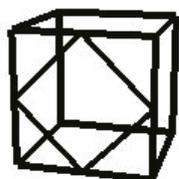


図 6 (1)

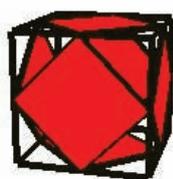


図 6 (2)

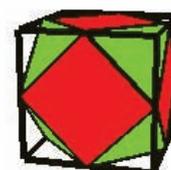


図 6 (3)

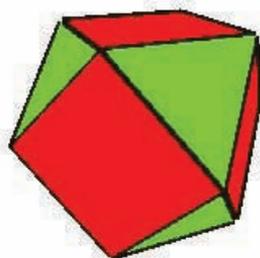


図 6 (4)

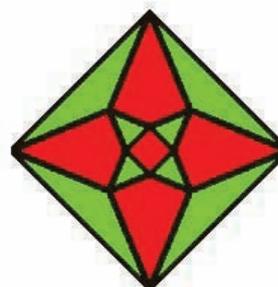


図 6 (5)

555==>3535

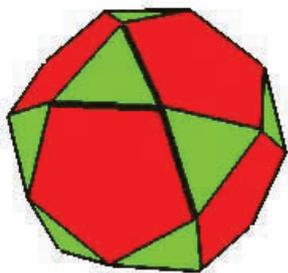


図 7 (1)3535

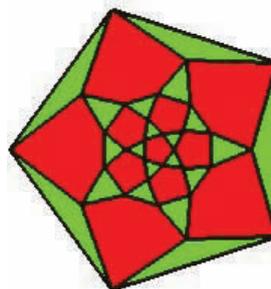


図 7 (2)3535の 2 次元射影図

2重切り操作による準正多面体の構成

444==>468

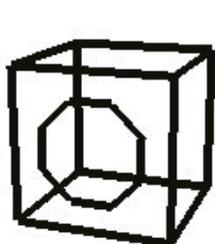


図 8 (1)

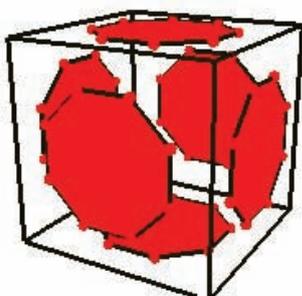


図 8 (2)

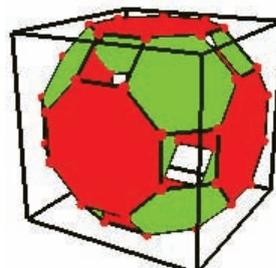


図 8 (3)

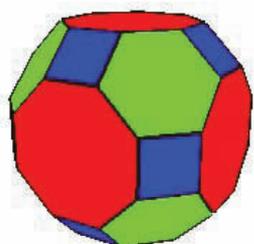


図 8 (4)

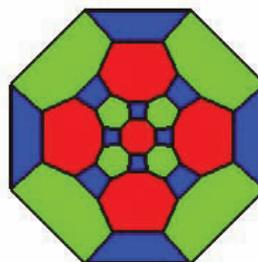


図 8 (5)

555==>4610

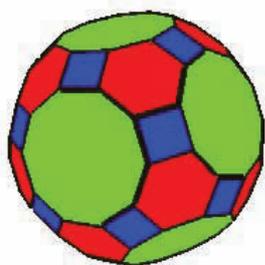


図 9 (1)4610

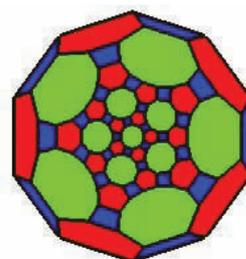


図 9 (2)4610の 2 次元射影図

削辺操作による準正多面体の構成

444==>3444



図10(1)

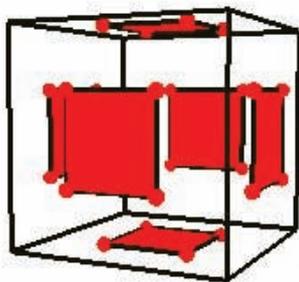


図10(2)

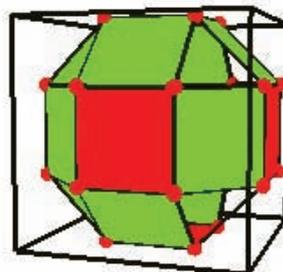


図10(3)

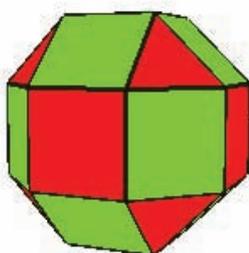


図10(4)

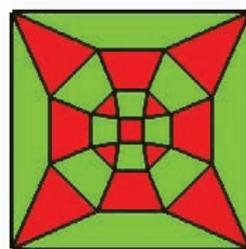


図10(5)

555==>3454

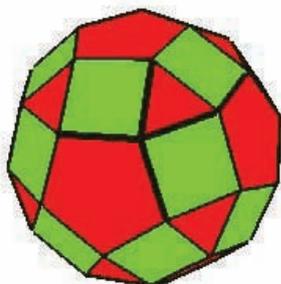


図11(1)3454

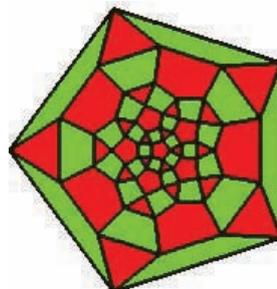


図11(2)3454の2次元射影図

振り切り操作による準正多面体の構成

444==>33334

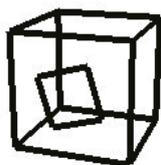


図12(1)

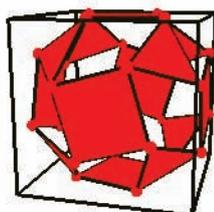


図12(2)

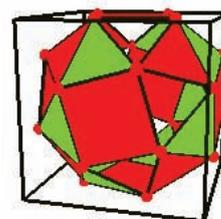


図12(3)

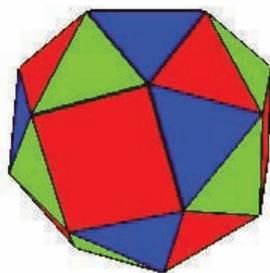


図12(4)

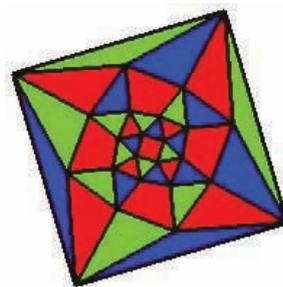


図12(5)

555==>33335

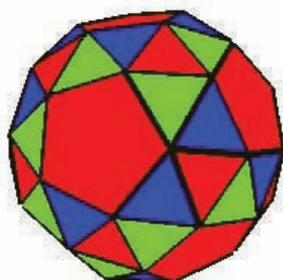


図13(1)33335

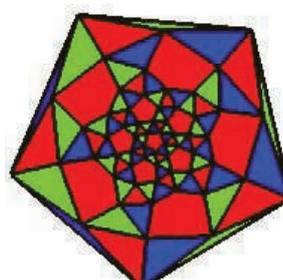


図13(2)33335の2次元射影図

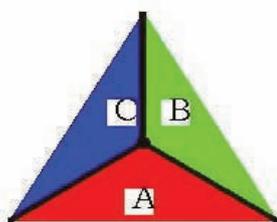


図14(1)タイプA

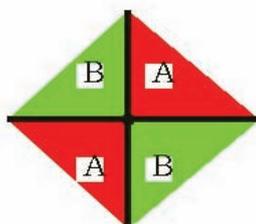


図14(2)タイプB

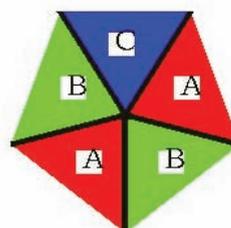


図14(3)タイプC

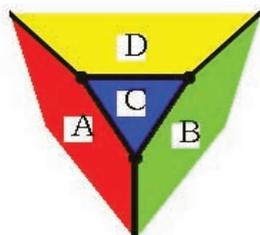


図14(4)タイプD

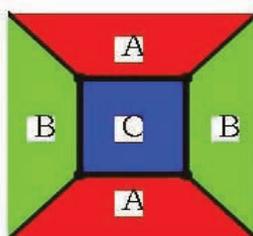


図14(5)タイプE

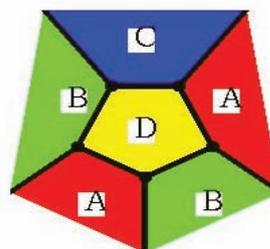


図14(6)タイプF

