広島工業大学紀要研究編
第44巻（2010）pp.253-258
論　　　　　　　文

解析接続の数値計算への応用

殿塚　勲*・三登　和希*・古屋　将宏*

（平成21年10月27日受理）

Analytic Continuation Applied to Numerical Calculation

Isao TONOZUKA, Kazuki MITO, and Masahiro FURUYA

(Received Oct. 27, 2009)

Abstract

A power series with complex variable converges within the radius of convergence, absolutely and uniformly. A holomorphic function is represented by a power series locally, i.e. within the radius of convergence. Starting from the local power series, we show a method to spread the region of convergence by means of suitable transformation of variable. If the region of convergence has a wide area than the original one, the convergence is expected to be fast, which can be applied to a calculation of holomorphic function represented by a power series.

Key Words: power series, radius of convergence, complex function, holomorphic function, analytic continuation

1　はじめに

19世紀の近代解析学では変数を実数から複素数にまで拡張したこと，および極限操作の交換の重要性が指摘されてきた。[1]

すなわち変数を複素数にまで拡張することで初等関数が統一的に記述され，その本質が複素関数の正則性のもとに制御されることが明かとなった。

一方極限操作の交換・移行とは例えば２重級数の和の順序の交換であったり，関数項級数の項別微分や項別積分などであり，このような極限の交換可能条件の吟味のもとに極限操作を移行することの重要性が認識されるようになり，例えばベキ級数により解析接続を行うときには極限操作の交換・移行が縦横に使われており，画期的な結果が導かれている。[2] [3]

ここでは複素変数 z のベキ級数で表現された関数について考える。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

級数(1)の収束半径を r_z とすると，その内部領域

$$|z| < r_z \tag{2}$$

では正則関数を表す。図１の中の原点を中心とする円 C0 がその収束円である。次に(2)の内部の１点 z_0 の回りのベキ級数は，その点での関数 $f(z)$ の $z = z_0$ における n 階微係数の値が分かれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \tag{3}$$

により与えられる。ここで(3)の展開係数を b_n とおいた。n 階微係数の値は(1)を n 階項別微分して $z = z_0$ と置いたものであるから

$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{d}{dz_0^n} z_0^m$$

* 広島工業大学情報学部知的情報システム学科

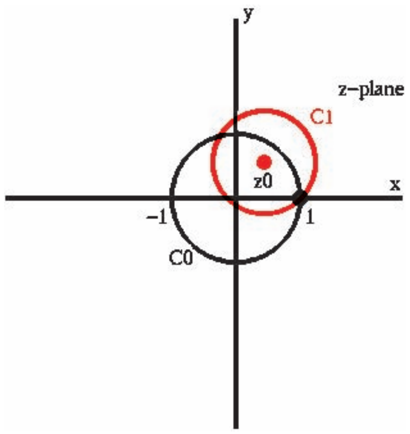

図１　原点を移動する変換による解析接続

$$= \sum_{m=n}^{\infty} a_m \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} z_0^{m-n}$$
$$= \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} z_0^{m-n} \tag{4}$$

で与えられる。

(3)の収束半径を r_{z0} とすればその収束域は z_0 を中心とする円の内部

$$|z-z_0| < r_{z0} \tag{5}$$

である。領域(5)は図１の円 C1 の内部であり，これが C0 と重なる部分があるのは当然であるが，更に外部にはみ出すこともあり得る。これが解析接続である。ここで(4)を導くために微分演算と無限和をとる操作の交換がなされていることに注意しよう。これが可能なのは複素変数のベキ級数の一様収束性による。

次にベキ級数(3)はベキ展開の中心の平行移動

$$w = z - z_0 \tag{6}$$

によっても作ることができることを示そう。すなわち級数(1)を

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} z_0^{n-m} w^m \tag{7}$$

として２重和の順序を入れ換えて

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} w^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m w^m$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-z_0)^m \tag{8}$$

と書くと b_m は

$$b_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} \tag{9}$$

となる。これは記号 n と m を入れ換えれば(4)と同様である。すなわち，$z = z_0$ の回りの級数展開を n 階微係数を用いてもベキ展開の中心の平行移動(6)によっても同じ結果を得る。

(7)から(8)を導くためにも n の和と m の和を入れ換えていることに注意しよう。また展開係数 b_m の値を求めるのに無限項の計算が必要がある。

解析接続によりこれまで収束しなかった領域でも収束したり，または収束するにしてもその収束の速度が早まれば数値計算にも有用となる。これをコンピュータを利用して実際に行うとき新しい展開係数 b_m の計算が無限項の和で表される，ということは，精度的にも計算の手間においても困難が伴う。

次に述べる中心を変更しない変換によれば，新しい展開係数を求めるのに有限項の和の計算で済むことを示す。

２　ベキ級数の中心を変更しない変換

(1)から出発してその収束域内の点をたどりながら(9)を求めつつ解析接続することは原理的に可能である。これをコンピュータを用いて数値的に行うことを考える。そのためには新しい係数(8)を何度も精度よく求めことが必要となる。しかしながら(8)は無限項の和であり，しかもこれを無限個を知る必要がある。もちろん精度を決めておき，何項まで求めればよいかを評価した上で行えばよいが，それでも解析接続は何段階もの変換を行うのであるから誤差の評価は極めて難しい。

一般に変換(6)のように展開の中心を変更したときは新しい展開の係数を求めるためには無限項の和が必要であることが知られる。しかし展開の中心を変更しない変換，例えば双一次変換

$$z = \frac{\alpha w}{1-\beta w} \quad \text{すなわち} \quad w = \frac{z}{\alpha + \beta z} \tag{10}$$

であれば，新しい係数は元の係数を用いて有限項の和で求められる。実際

$$z = \frac{\alpha w}{1-\beta w} = \alpha w(1 + \beta w + \beta^2 w^2 + \cdots) \tag{11}$$

を(1)に代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n w^n (1-\beta w)^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} (-\beta)^m w^{n+m} \tag{12}$$

となるが，ここで２項係数の関係式

$$\binom{-n}{m} = (-1)^m \binom{n+m-1}{m}$$

を用いると

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m} a_n \alpha^n \beta^m w^{n+m} \qquad (14)$$

となる。ここで $k = n+m$ とおき（n, m）の和を（k, m）の和に書き換えると

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} a_{k-m} \binom{k-1}{m} \alpha^{k-m} \beta^m w^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k \qquad (15)$$

となり，その展開係数 b_k は m による有限和

$$b_0 = a_0 \quad b_k = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} a_{k-m} \alpha^{k-m} \beta^m \quad (\mathrm{k} \geq 1) \qquad (16)$$

により求められる。

変換(6)では新しい係数を求めるのに無限項必要であるのに対し，変換(10)では有限項で済む理由をここで説明しておく。

(8)式の２重和のはじめの数項を次のような表に書く。

	m＝0	m＝1	m＝2	m＝3	m＝4
n＝0	a_0				
n＝1	$a_1 z_0$	$a_1 w$			
n＝2	$a_2 z_0^2$	$2a_2 z_0 w$	$a_2 w^2$		
n＝3	$a_3 z_0^3$	$3a_3 z_0^2 w$	$3a_3 z_0 w^2$	$a_3 w^3$	
n＝4	$a_4 z_0^4$	$4a_4 z_0^3 w$	$6a_4 z_0^2 w^2$	$4a_4 z_0 w^3$	$a_4 w^4$

この表より m を固定して先に n で和をとると，その和は無限項になることは明かであろう。

一方(14)式を同様の表に示すと次のようになる。

	m＝0	m＝1	m＝2	m＝3	m＝4
n＝0	a_0				
n＝1	$a_1 \alpha w$	$a_1 \alpha \beta w^2$	$a_1 \alpha \beta^2 w^3$	$a_1 \alpha \beta^3 w^4$	$a_1 \alpha \beta^4 w^5$
n＝2	$a_2 \alpha^2 w^2$	$2a_2 \alpha^2 \beta w^3$	$3a_2 \alpha^2 \beta^2 w^4$	$4a_2 \alpha^2 \beta^3 w^5$	$5a_2 \alpha^2 \beta^4 w^6$
n＝3	$a_3 \alpha^3 w^3$	$3a_3 \alpha^3 \beta w^4$	$6a_3 \alpha^3 \beta^2 w^5$	$10a_3 \alpha^3 \beta^3 w^6$	$15a_3 \alpha^3 \beta^4 w^7$
n＝4	$a_4 \alpha^4 w^4$	$4a_4 \alpha^4 \beta w^5$	$10a_4 \alpha^4 \beta^2 w^6$	$20a_4 \alpha^4 \beta^3 w^7$	$35a_4 \alpha^4 \beta^4 w^8$
n＝5	$a_5 \alpha^5 w^5$	…	…	…	…

w のベキ $k = n + m$ が一定の項の和は斜めに和をとることであり，よって b_k を求める和は有限項となるのである。

変換(6) $w = z - z_0$ は原点移動を伴うのに対し，変換(10) $w = \dfrac{z}{\alpha + \beta z}$ は原点は不変であり，これが新しい展開係数 b_k を求めるために無限項か有限項かの違いを産んでいる。

3　変換(10) $z = \dfrac{\alpha w}{1 - \beta w}$ の応用

3.1　応用(1)

次のベキ級数(17)の収束半径は $r = 1$ であり，その収束域内部では $\dfrac{1}{1-z}$ に収束することはよく知られる。これに変換(10)を行う。

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots \qquad (17)$$

変換したあとの係数 b_k で $a_k = 1$ とおくと

$$b_k = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} \alpha^{k-m} \beta^m = \alpha (\alpha + \beta)^{k-1} \qquad (18)$$

となるので w 平面での収束円は $w = 0$ を中心とし，その収束半径は

$$r_w = \frac{1}{|\alpha + \beta|} \qquad (19)$$

である。

3.1.1　$\alpha = 2$, $\beta = -\dfrac{2}{3}$

このとき係数 b_k は

$$b_k = 2\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$$

となる。$z = -1$ は元の級数では発散するが，変換した後の級数では $w = -\dfrac{3}{8}$ なので(14)は

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \left(-\frac{3}{8}\right)^k$$
$$= 1 - \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \qquad (20)$$

となり収束する。(20)によると 10^{-10} の精度を得るために32項の和が必要であった。

w 平面の収束円は $|w| = r_w = \dfrac{3}{4}$ であり，これを z 平面に戻すと

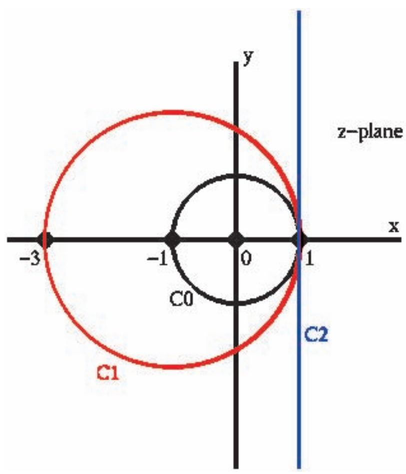

図２　原点を移動しない変換による解析接続

$$\left|\frac{z}{z-3}\right|=\frac{1}{2}$$

は2点 $z=0$ と $z=3$ からの距離の比が1対2であるようなアポロニウスの円となる。これは $z=-1$ を中心とし半径2の円であり，元の収束円 $|z|=1$ を含むので，収束域が広がった。図2の円C0は元の収束円であり，円C1は変換した後の収束円である。$z=1$ は関数⒄の特異点であり，いかなる変換を用いてもこの点を収束円の内部には含ませることはできない。

3.1.2　$\alpha=2,\ \beta=-1$

係数 $b_0=1$，$b_k=2(k\geq 1)$ であり w 平面の収束半径は $r_w=1$ でこれを z 平面になおすと

$$\left|\frac{z}{2-z}\right|=1$$

は2点 $z=0,2$ の間の垂直2等分線 $Re(z)=x=1$ となる。図2の直線C2がこの垂直2等分線であり，これより左側の領域が収束域となる。収束域はこの双一次変換⑽では最大となる。

この場合，$z=-1$ は $w=-\frac{1}{3}$ に対応し，この点で級数は

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}b_kw^k=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{2} \tag{21}$$

に収束する。

$z=-1$ のとき，パラメータを $\alpha=2$，$\beta=-1$ に選んだ場合の級数の収束の速さは $\alpha=2$，$\beta=-\frac{2}{3}$ よりも速い。実際㉑によれば 10^{-10} の精度を得るために20項の和で済んだ。

3.1.3　$\alpha=2,\ \beta=1$

$$b_0=a_0=1 \qquad b_k=2\cdot 3^{k-1}(k\geq 1) \qquad r_w=\frac{1}{3}$$

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}b_kw^k=1+2\sum_{k=1}^{\infty}3^{k-1}w^k$$

$$\mathrm{z}=\frac{2w}{1-w} \qquad \mathrm{w}=\frac{z}{2+z}$$

w 平面の収束円は z 平面に変換すると

$$|w|=\left|\frac{z}{z+2}\right|=r_w=\frac{1}{3}$$

より z 平面の収束円は $z=0$ と $z=-2$ からの距離が1対3であるようなアポロニウスの円なので実軸上，$x=1$ と $x=-\frac{1}{2}$ を通る円であり，これは

$$\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$$

と書ける。すなわちこれは元の収束域より狭い。

$z=-1$ は w 面では $w=-1$ に対応し，これは w 面の収束域 $|w|<\frac{1}{3}$ の外側なので発散する。

3.2　応用⑵

次にベキ級数

$$-\log(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots \tag{22}$$

に変換⑽を行ってみる。関数 $-\log(1-z)$ の特異点は $z=1$，∞ でありこれらは分岐点なので，これら2点間にカットを入れた面で考える。

z 面での収束半径は $r_z=1$ である。

w 平面に変換したあとの係数 b_k ⒂で $a_{k-m}=\frac{1}{k-m}$ とおくと

$$\begin{aligned}
b_k&=\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}\frac{1}{k-m}\alpha^{k-m}\beta^m\\
&=\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{m!(k-m)!}\alpha^{k-m}\beta^m\\
&=\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k!}{m!(k-m)!}\alpha^{k-m}\beta^m\times\frac{1}{k}-\frac{\beta^k}{k}\\
&=\frac{(\alpha+\beta)^k}{k}-\frac{\beta^k}{k}
\end{aligned}$$

したがって w 面での収束半径は

$$r_w=\frac{1}{|\alpha+\beta|} \qquad |\alpha+\beta|>|\beta| \text{ のとき}$$

$$r_w=\frac{1}{|\beta|} \qquad |\alpha+\beta|<|\beta| \text{ のとき}$$

となる。

3.2.1　$\alpha=2,\ \beta=-\frac{2}{3}$

$$r_w=\frac{3}{4} \qquad b_k=\left(\frac{4}{3}\right)^k\frac{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)}{k}$$

$$z=-1 \quad \text{のとき} \quad w=-\frac{3}{8}$$

w 平面の収束円 $|w|=\frac{3}{4}$ は z 平面では $|z+1|=2$ に対応し，元の収束円 $|z|=1$ を完全に含む。(図2の円C1)

$$-\log(2)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\left(-\frac{3}{8}\right)^k$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}+\cdots \tag{23}$$

(23)によると，10^{-10} の精度は 26 項の和が必要であった。

3.2.2　$\alpha=2$，$\beta=-1$

w 平面に変換された級数の係数 b_k は次のようになり

$r_w=1$　　$b_k=\dfrac{2}{k}$　$(k=odd)$　：　$b_k=0$　$(k=even)$

したがって w 平面での収束域は円 $|w|=1$ であり，この領域を z 平面に戻すと直線 $x=1$ の左半平面となる。（図２の直線 C2）

$$-\log(1-z)=\log\frac{1+w}{1-w}=2w\left(1+\frac{w^2}{3}+\frac{w^4}{5}+\cdots\right)$$

これは収束の速い式として知られており，対数の数値計算によく用いられる。[1] $z=-1$ は w 空間では $w=-\dfrac{1}{3}$ であり $\alpha=2$，$\beta=-\dfrac{2}{3}$の場合より収束は速い。

$$-\log(2)=\log\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right) \tag{24}$$

(24)では 10^{-10} の精度は９項の和で済んだが，このように少ない項で高い精度が得られたのは w の奇数項だけで表わされたからであろう。

3.3 より速い収束を求めて

これまで双一次変換を用いてベキ級数をさらに収束の速いベキ級数に変換することを行ってきた。この変換で $\alpha=2$，$\beta=-1$ の場合の w 平面の単位円内が z 平面の半平面に写像されるときが最良の変換であろう。

これを越えるには例えば

$$1-z=\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^2 \tag{25}$$

のような双一次変換ではない関数が必要となる。(25)は $z=0$ は $w=0$ に，$z=1$ は $w=1$ に対応する。しかも $z=1$ では角度が２倍に写像されるので w の単位円内が z の全平面に１から実軸に沿って正方向にカットを入れたものに１対１に写像される。

(25)より

$$z=\frac{4w}{(1+w)^2}$$

を(1)のベキ級数に代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{k=0}^{\infty}b_kw^k \tag{26}$$

となり係数 b_k は

$$b_k=\sum_{m=0}^{k=1}(-1)^m\binom{2k-m-1}{m}a_{k-m}4^{k-m} \tag{27}$$

となる。ここで $a_{k-m}=1$ とおいて級数(17)に適用すると(27)は

$$b_k=4k$$

となり，$z=-1$ は $w=-3+2\sqrt{2}=-0.17157\equiv w_1$ に対応するのでこの点では

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}4k(w_1)^k$$

となる。これによれば 10^{-10} の精度は 14 項で得られた。

一方対数の例(22)に適用すると，元の級数の係数を $a_{k-m}=1/(k-m)$ とおくと変換された係数 b_k は奇数項だけが残り

$$b_k=\frac{4}{k}\quad(k=odd)\ :\ 0\ (k=even)$$

の形にまとまるので，k を改めて $2k+1$ とおくと結果は

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{2k+1}(w_1)^{2k+1}$$

となる。これによれば $z=-1$ では 10^{-10} の精度を得るのにわずか６項で達成された。

４　おわりに

[1] によると，解析学は実数関数だけを扱う場合でも複素数までの考察が必要であるという。（第５章）　さらに第３章，第４章をよく読むと極限操作の交換可能性の重要性が指摘されていることがわかる。

複素関数が正則関数であることの条件として，よく知られた Cauchy-Riemann の関係式は複素関数を実部と虚部に分けて $w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ と書くと $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ であるが，これを

$$\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x}=\frac{\partial f(x+iy)}{i\partial y}$$

のように書きなおすこともできる。

これによれば正則関数は x に関する偏微分と y に関する偏微分の交換可能性であるといえるし，同時に $\bar{z}=x-iy$ は含まず，$z=x+iy$ だけで書き表されることも意味している。

このノートでは解析接続には極限操作の交換が重要な役割を果たしていることを示し，またこれを積極的に利用して，収束域の拡大や収束の速さを調べた。このときパラメータや扱い方によっては前の級数よりも収束域が狭くなった

り遅くなることもあるので，扱いには十分な注意が必要である。

参考文献

［1］高木貞治, 解析概論　改訂第３版, 岩波書店（1961．7）
［2］高橋秀俊，数値計算の話，科学 pp706-713（1975.12）岩波書店
［3］殿塚勲・河村哲也，理工系の複素関数論　東大出版会（1999）