

アダプティブ二次元有限要素磁界解析のための磁束線を用いた一手法

佐々木 雄太*・山下 英生**

(平成21年10月29日受理)

An Adaptive Method Using Magnetic Flux Lines For Two-Dimensional Finite Element Magnetic Field Analysis.

Yuta SASAKI and Hideo YAMASHITA

(Received Oct. 29, 2009)

Abstract

The finite element method is widely used as a numerical analysis technique for a field in the engineering field including the electromagnetic field analysis. However, when an analytical field is divided into finite elements, the distribution of finite elements size differs depending on the analyst, and then the accuracy of analysis is influenced by his experience. The study about an adaptive method is making progress in solving this problem.

In this study, we suggest an adaptive method by using magnetic flux lines in two-dimensional magnetic field analysis. By using magnetic flux lines, large and small finite elements are generated and distributed at a gentle place and a big place of a change of quantity of physics, respectively.

In this paper, we use two models of magnetic field and show the utility of this proposed adaptive method.

Key Words: electromagnetic field analysis, finite element method, adaptive method, magnetic flux line, subdivision of finite elements

1 はじめに

現在、数値解析手法の一つである有限要素解析法は、構造工学の分野から発展し、流体力学、熱伝導、電気工学などの多くの工学分野で導入され、従来、解析が困難であった複雑な境界値問題に対する数値解を与えることを可能にしている。電気工学の分野においては、電界や磁界の解析に利用され、汎用の解析ソフトも普及してきている。しかし、汎用の解析ソフトを用いて得られる解の精度は、解析領域の有限要素の粗密分布により大きく影響を受ける。すなわち、解析場の物理現象に詳しい専門家にゆだねないと解の精度は保障されない。精度のよい解を得るには解析領

域全体を一様に細かい要素に分割すればよいが、要素数が増え、計算コストが多くなるものとなる。少ないコストで解の精度を維持した結果を得るには、物理量分布を十分考慮して、物理量の変化の激しい部分のみを細かい要素に分割するといった要素の粗密分布を与えなければならない。この作業を行うには、十分な経験と専門知識が必要となる。しかし、経験に頼ることに限界があり、より複雑な解析モデルに対して物理量の分布を予想することは難しく、適切な要素分割を行うことは困難である。また、有限要素解析の大衆化が進むと経験の少ない人も有限要素解析を使うようになってくる。そこで、経験によらず、希望許容誤差を満足し、物理量分布を考慮した要素の粗密分布を自動的

* 広島工業大学大学院工学系研究科情報システム科学専攻

** 広島工業大学情報学部知的情報システム学科

に得ることのできるアダプティブ法の研究が近年盛んに行われている^{1), 2)}。本論文では、磁束線の分布が物理量分布に一致することに着目して、磁束線を利用して三角形要素の生成を行うアダプティブ法を提案する^{3), 4)}。以下では、まず、本手法の概要を説明し、次に、要素を構成する点を磁束線上に発生させる方法について説明した後、誤差計算について説明する。最後に、適応例として二つのモデルに対して本手法を適応した結果について説明する。

2 本手法の概要

二次元磁場解析における、物理量変数は磁気ベクトルポテンシャルである。したがって、磁気ベクトルポテンシャルの分布が急激に変化するところを小さな三角形要素に分割し、ポテンシャル分布がゆるやかな変化のところは、大きな三角形要素にすれば物理量分布を考慮した要素の分割がなされているといえる。磁束線はポテンシャルの等高線を表している。すなわち、ポテンシャル分布が急激に変化するところで、磁束線間隔が狭く、ゆるやかな変化のところでは、磁束線の間隔が広い。本手法では、この性質を利用して、磁束線上に三角形要素を作成するための点を自動発生させる。また、発生させる磁束線の本数を解析回数に応じて増やすことにより、アダプティブ解析の初期段階における要素の偏りが少なくなるようにしている。一つの磁束線上に発生させる点間隔は、隣接する磁束線までの最短距離とする。このようにすることにより、磁束線間隔が狭い領域では多数の点が発生し、小さな三角形要素を生成できる。このようにして発生させた点を用いて、Delaunayのアルゴリズム⁵⁾により、解析領域を三角形に分割する。入力データは、アダプティブ反復回数と物体形状と磁束線の本数のみで、必要最小限のデータである。

図1に示すように有限要素分割、有限要素解析、磁束線発生、有限要素再分割を繰り返すことにより、順次要素分割が密になり、適切な要素の粗密分布が得られる。また、

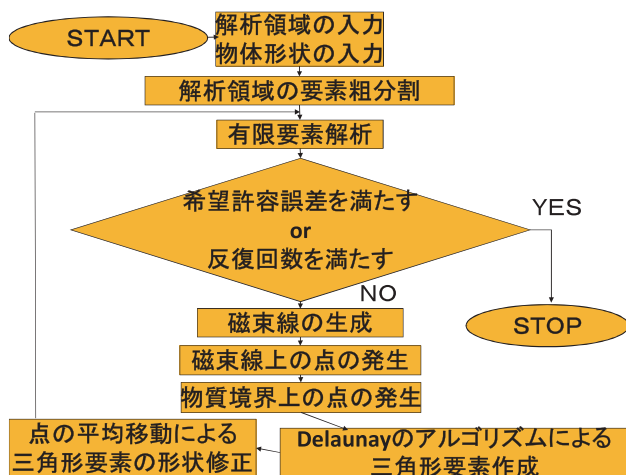


図1 本手法のフローチャート

磁束線の本数を変更することにより、その繰り返し回数を少なくすることもできる。

3 点発生方法

物理量分布を考慮した要素の粗密分布を得るために、本手法では、磁束線上に三角形要素を構成する点を発生させる。以下に、点の発生方法について述べる。

3.1 磁束線上の点発生方法

一般に磁束線は解析領域の自然境界上から出発し、境界上の他の点で終了する。この磁束線の2端点の一方から順次磁束線上に点を発生させ、終了端点まで点の発生を行う。始点は、2端点のうち隣接する磁束線までの距離が近いほうの端点とする。次に一本の磁束線の始端点から、磁束線上に点を発生させる方法について説明する。図2(a)は3本の磁束線①, ②, ③が境界線PQから発生している状況を示す。ここでは図2の②の磁束線上に点を発生させる場合を例として説明する。図2の(a)のように②に隣接する磁束線①と③に垂線を引き、その交点との距離 (d_1 , d_3) を計算する。そして、図2(b)のように、 d_1 と d_3 の短いほうの距離 (例えば $d_3 < d_1$ とすると $d = d_3$) を選び、その距離だけ磁束線上を進み、そこに点Bを発生させる。次に、図2(c)のように新しく発生させた点Bから、同様に両隣の磁束線に垂線を引き、距離を計算する。そして、近いほうの距離を選び、その距離分だけ磁束線上を進みそこに新たな点を作成する。この方法を磁束線の終点まで続ける。点発生を開始させなかった側まで行くと、次の磁束線に新しい点を発生させる。

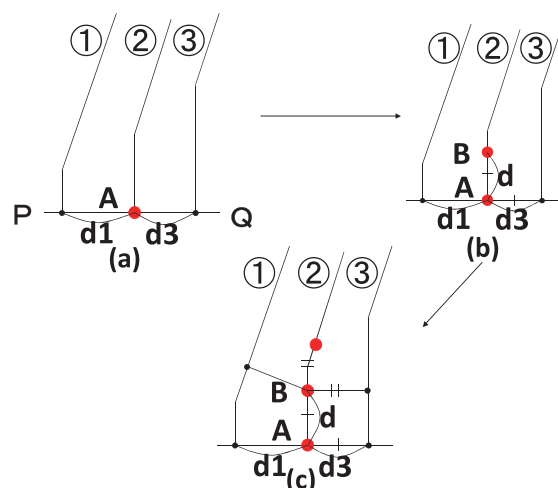


図2 磁束線上の点発生

次に、磁束線が物質境界 (例えば鉄と空気の境界) を越えたときの点発生について述べる。図3のように鉄の中を3本の磁束線が通っているとす。まず、①の磁束線に上述した方法で、点Bまで点を発生させる。この時、次に発

生させる点は、先ほど説明した方法によると図(b)の点Cの位置に点を発生させることになる。このままでは、物体境界上に点が発生せず物質形状が変化することになる。これを避けるために、磁束線上の次に発生させる点が物質境界を横切る時、点Cの場所に点を発生させるのをやめ物体境界上に点Cを発生させる。なお、CB間の距離とCA間の距離の比を求め、これがある与えられた値 ε より小さければ点Bを消去する(図3(c)参照)。なお ε は、0.3としている。

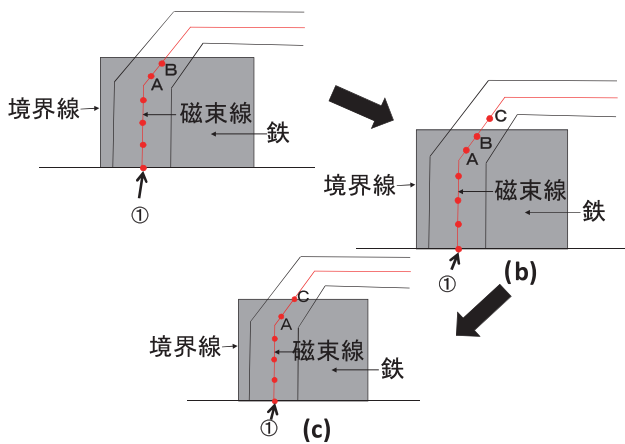


図3 物質境界線付近の点発生

3.2 解析領域の境界および物質境界の点発生方法

解析領域の固定境界および、コイルや鉄心などの物質境界上の点発生方法について述べる。解析領域の固定境界の点発生は、その境界をポテンシャル値が0の磁束線と見なして、前述した方法で点を発生させる。次に、物質境界上の点発生を図4を用いて説明する。図4は、物質として鉄心、コイルが存在するモデルである。図4の赤色の矢印で示す鉄心境界のPQ間の点発生について説明する。全ての磁束線に点を発生させた後に、PQ間に次のようにして点を発生させる。端点P、Qの一つを起点とする(図4(a)参照)。点を発生させる起点の決定は、境界線の両端P、Qのうち、どちらがより磁束線上に発生させた点に近いかにより決定する。起点を決定したのち、起点から磁束線上に

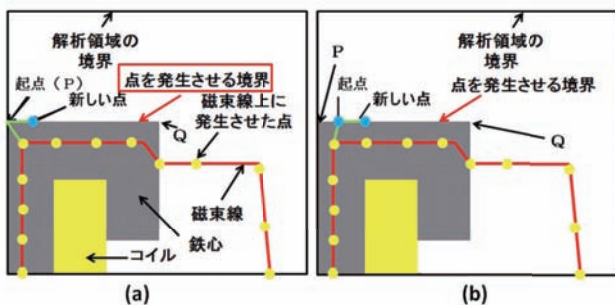


図4 物質境界線上の点発生図

発生した点で一番近い点を見つけ、そこまでの距離を計算し、計算した距離分だけ物質境界PQ上を進み、そこに新しく点を発生させる。

以後、同様の処理を繰り返すことにより境界PQ上に点を作成する(図4(b)参照)。この操作を端点Qまで繰り返す。この作業をコイル、物質境界上全てについて行う。ただし、物体境界が解析領域と重なっている場合、解析領域のほうの処理が優先され、この処理は適用されない。

3.3 ドローネ三角形

これまでに発生させた点を用いてドローネ分割を行い三角形要素を作成する。また、次節で述べる方法により要素の偏りを少なくしている。

3.4 点の平均移動

作成された三角形要素の点を平均移動することにより要素の形状修正を行う。図5(a)のように点Aが5つの要素の構成点となっているとする。点Aを構成要素とする要素の各頂点を抽出し、それらの点のxおよびy座標の平均を点Aの移動後の座標にする。なお、境界線上に存在する点の場合は、境界線に沿って点を移動させる。この方法を、解析領域すべてに存在する点に適応する。

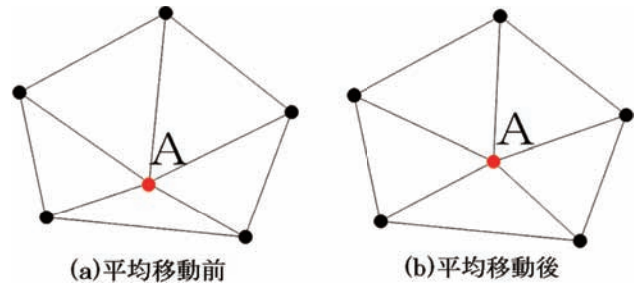


図5 点の平均移動

3.5 境界線上の二重点の発生

磁場解析において、鉄心が存在する場合、磁束線は鉄心に吸引され、鉄心そばの空気領域やコイル領域には磁束線が少なくなる。このような領域に本手法を適応した場合、空気またはコイル領域に扁平な要素が発生する。例えば図6に示す鉄心とコイルが配置されたモデルでは、磁束線が鉄心を通り、コイル中は磁束線が少なくなる。この問題を解決するため、境界線上に二重節点の発生を行う。なお、二重節点を発生させる境界線は指定するものとする。次に、これら二重に発生させた点を指定した方向に距離 e_d だけ移動し、再度ドローネ分割を適用する(図7(b)参照)。最後に、平均移動を行う。例として、図7(a)、(c)に二重点を発生させる前の分割図と、発生後の分割図を示す。

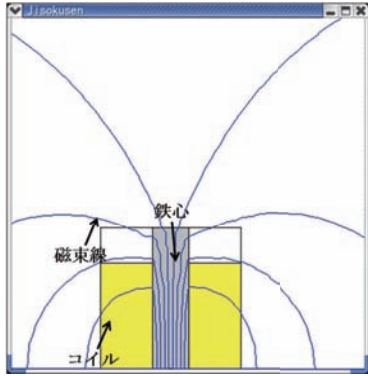


図6 磁束線があまりコイルを通らないモデル

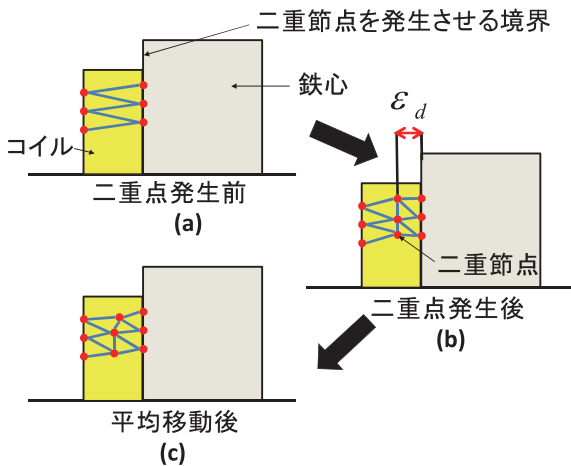


図7 境界線上の二重点の発生

4 誤差計算

アダプティブ法において真値の推定は誤差評価を行う上で重要なことである。ここでは、文献1)の真値の推定式を用いる。

本手法では、有限要素解において一次三角形要素を使用しているため、解析結果として計算される磁束密度は各要素内で一定値となる。そこで、各節点ごとに、節点を共有している要素の磁束密度値の重み付き平均を計算し、その平均値をその節点における真値により近い値とする。すなわち、節点*i*を*n*個の要素が共有していた場合、節点*i*における磁束密度 B_i を次式により近似する。

$$B_i = \frac{\sum_{j=1}^n B_j^e w_j^e}{\sum_{j=1}^n w_j^e} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 B_j^e は節点*i*を共有する*j*番目の要素の磁束密度であり、 w_j^e は、その要素の面積である。

(1)式を用いることにより、解析領域に存在するすべての節点の磁束密度が推定できる。この節点の磁束密度を用いて、各要素内のより精度の高い磁束密度 B_{ideal}^e を次式により求める。

$$B_{ideal}^e = \sum_{i=1}^3 N_i B_i \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 N_i は補間関数である。

この推定された磁束密度 B_{ideal}^e と有限要素解析により得られている磁束密度 B_{FEM}^e から、要素*e*における誤差エネルギー λ^e を次式により求める。

$$\lambda^e = \frac{1}{2} \int_{S^e} (B_{ideal}^e - B_{FEM}^e) \nu (B_{ideal}^e - B_{FEM}^e) d\Omega \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 ν は磁気抵抗率である。

(3)式により求められた誤差エネルギー λ^e から(4)式を用いて解析領域全体の相対誤差 ε を計算する。

$$\varepsilon = \frac{\sum_{e=1}^{n_e} \lambda^e}{\sum_{e=1}^{n_e} \sqrt{\frac{1}{2} \iint \nu B_{ideal}^e{}^2 d\Omega}} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 n_e は総要素数である。

5 適用例

提案したアダプティブ法を用いて磁束線分布が上下対象となるモデルI(図8)と左右上下対象となるモデルII(図19)に適応し有用性を示す。灰色の部分が鉄心、赤い部分がコイル、白い部分が空気である。また、図8ではモデルの左右のコイルに100 mAの電流をそれぞれ逆方向に流した場合の解析を行う。図19ではモデルのコイルに100 mAの電流を流した場合の解析を行う。図8の緑の丸で囲まれている部分の境界線上に二重点を発生させコイル内部の要素が扁平にならないようにしている。2つのモデルともアダプティブの解析の回数ごとに磁束線の数を5、10、15と5本ずつ増やして解析を行った。以下に示すアダプティブ解析結果の分割図の左側の図が物体付近の拡大図、右側の部分が解析領域全体図となる。分割図の水色の部分がコイル、紫色の部分が鉄心、黒色の部分が空気である。

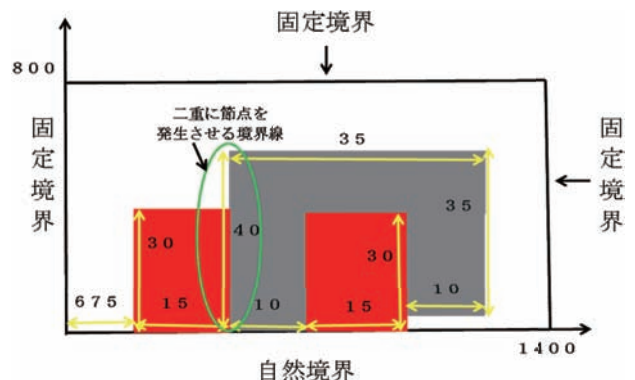


図8 磁束線が上下対象となるモデルI

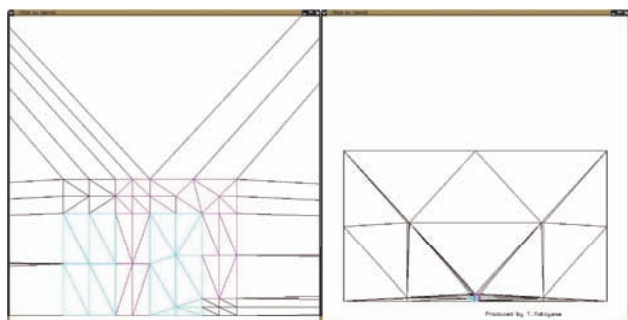


図9 解析1回目の分割図 (モデル I)

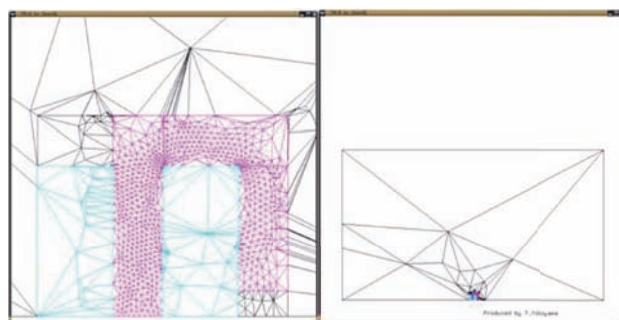


図13 解析3回目の分割図 (モデル I)

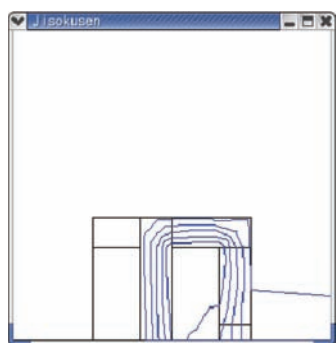


図10 解析1回目の磁束線図 (モデル I)

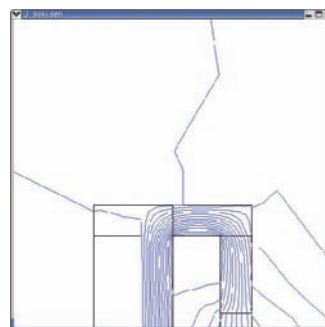


図14 解析3回目の磁束線図 (モデル I)

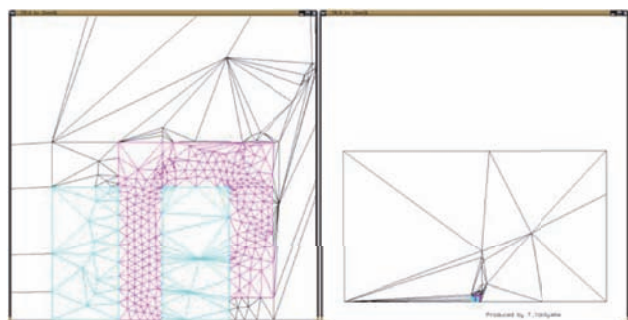


図11 解析2回目の分割図 (モデル I)

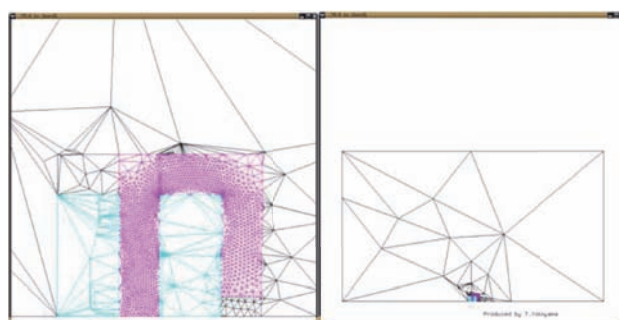


図15 解析4回目の分割図 (モデル I)

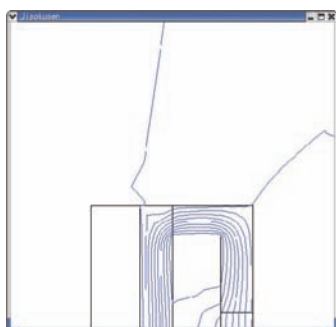


図12 解析2回目の磁束線図 (モデル I)

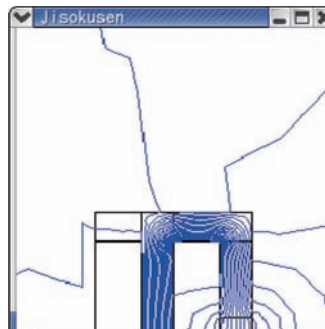


図16 解析4回目の磁束線図 (モデル I)

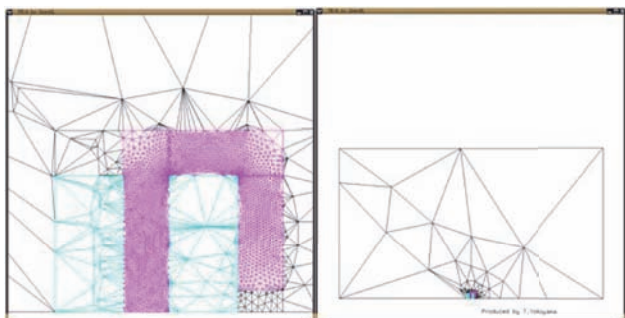


図 17 解析 5 回目の分割図 (モデル I)

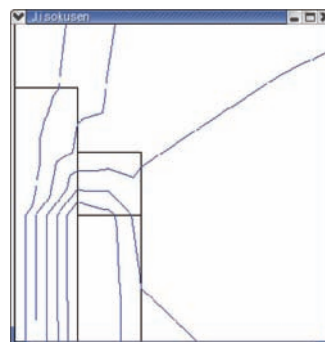


図 21 解析 1 回目の磁束線図 (モデル II)

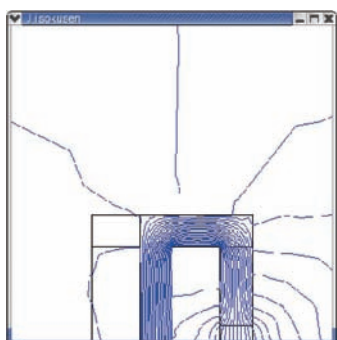


図 18 解析 5 回目の磁束線図 (モデル I)

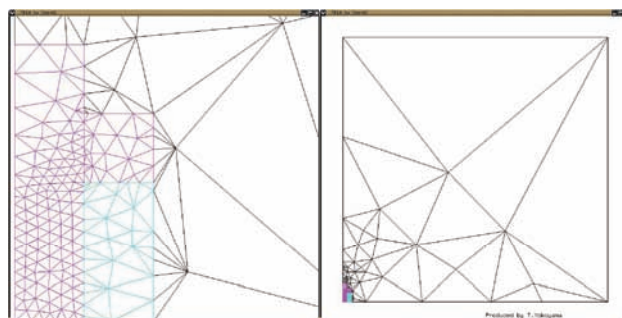


図 22 解析 2 回目の分割図 (モデル II)

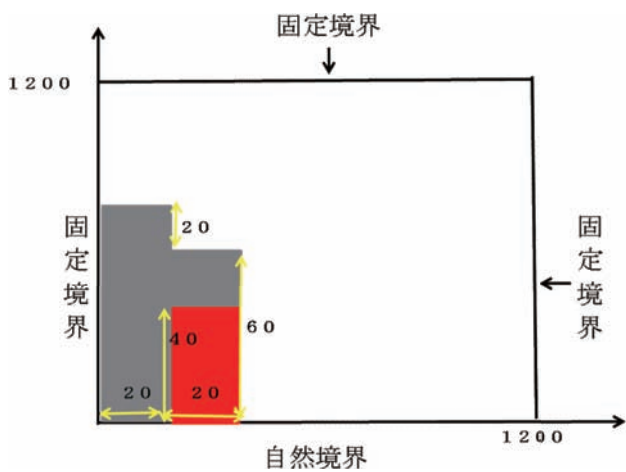


図 19 磁束線分布が上下左右対象となるモデル II

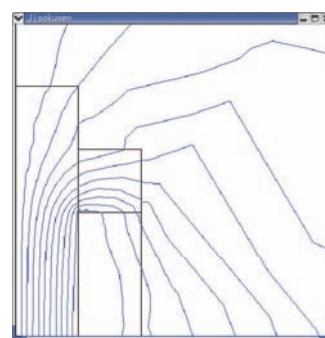


図 23 解析 2 回目の磁束線図 (モデル II)

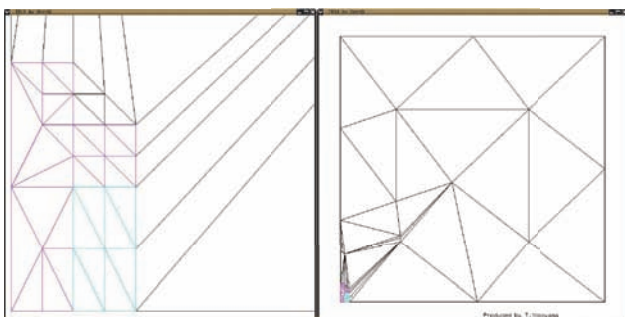


図 20 解析 1 回目の分割図 (モデル II)

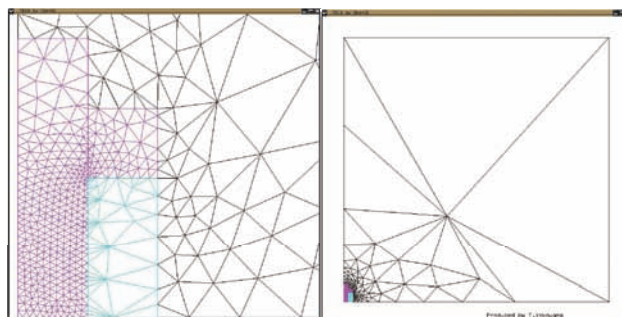


図 24 解析 3 回目の分割図 (モデル II)

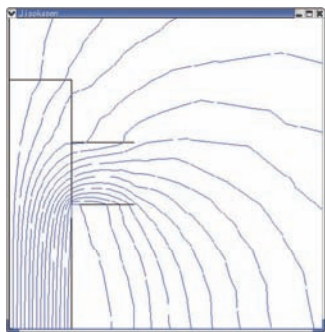


図 25 解析 3 回目の磁束線図 (モデル II)

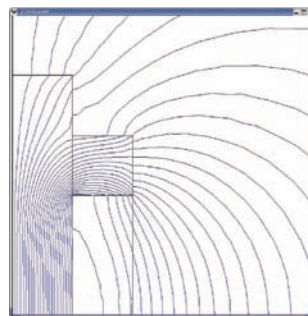


図 29 解析 5 回目の磁束線図 (モデル II)

5.1 アダプティブ解析における分割図と磁束線分布

モデル I では図 9 に示すように第 1 回目の結果では全体的に大きな要素が多く存在している状態である。解析を進めるごとに物質内部の要素は小さくなり、最終的には物質内部にかなり小さな要素が発生している (図 11,13,15,17 参照)。空気領域の要素は正三角形に近いものができている。磁束線分布も第 1 回目の解析結果 (図 10) では、滑らかとはいえないが、解析を進めるごとに徐々に滑らかな磁束線が得られている (図 12,14,16,18 参照)。また、モデル II でも同様にアダプティブ解析を進めるごとに結果が良好になっているのが確認できる (図 20 ~ 図 29 参照)。

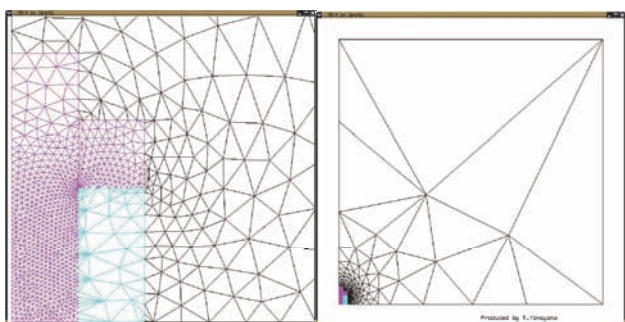


図 26 解析 4 回目の分割図 (モデル II)

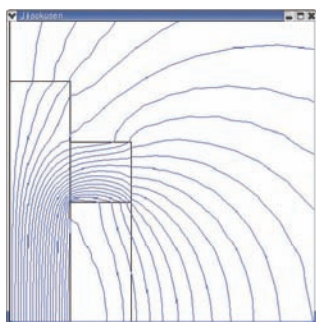


図 27 解析 4 回目の磁束線図 (モデル II)

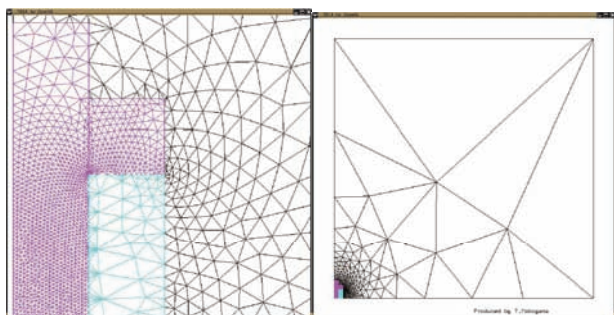


図 28 解析 5 回目の分割図 (モデル II)

5.2 誤差評価結果

モデル I とモデル II の誤差計算結果 (対数表示) をそれぞれ図 30, 31 に示す。

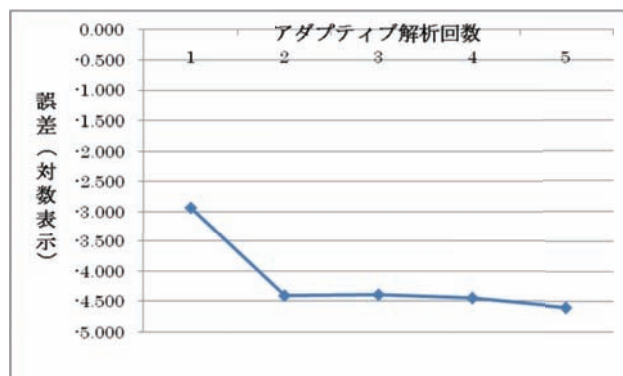


図 30 モデル I の誤差計算結果

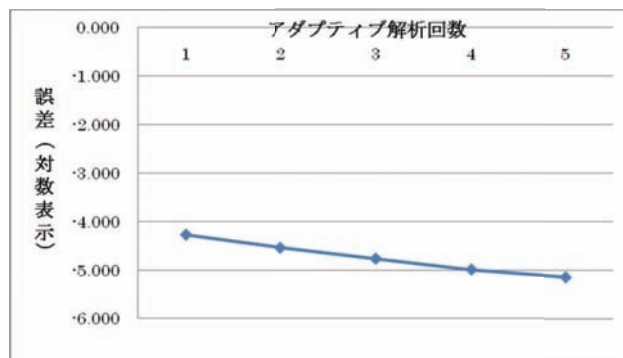


図 31 モデル II の誤差計算結果

モデルⅠ（図30）では磁束線が鉄心に集中し、空気中に漏れる磁束線が少ないので、アダプティブ解析の2回目に誤差が小さくなり、その後、解析を進めても誤差の減少が顕著にならないことが分かる。一方、モデルⅡ（図31）では、空気領域に磁束線が多く漏れるので、アダプティブ解析を進めるごとに誤差が少なくなる傾向を示している。

6 おわりに

本論文では、解析者の経験にたよらずに、与えられた希望許容誤差を満足する結果が得られるアダプティブ法の開発を行った。解析対象の物理量の変化の急な所では小さな有限要素が、その変化が緩やかな場所では大きな要素が生成できるようにするために、磁束線を利用した方法を提案した。鉄とコイルで構成される2つのモデルに適用し本手法の有用性を示した。なお、ここでは2次元場磁場解析に適用したが、本手法は、3次元場への拡張も行える。

今後の課題としては、さらに多くのモデルに適用し、有効性を確かめること、および3次元モデルに対するアダプティブ解析システムの開発があげられる。

文 献

- 1) 横山貴之, Vlatko Cingoski, 金田和文, 山下英生: “磁束密度の大きさを考慮したバブルシステム・アダプティブ有限要素自動分割法”, 電気学会論文誌D (産業応用部門誌), Vol.119-D, No.11, pp.1416 ~ 1421, Nov., 1999
- 2) 手塚明, 土田英二: “アダプティブ有限要素法”, 丸善株式会社 (2003)
- 3) 佐々木雄太, 山下英生: “アダプティブ二次元有限要素磁界解析のための磁束線を用いた一手法の提案”, 平成20年度 電気・情報関連学会中国支部第59回連合大会講演論文集, No.4-12, p.220, 2008.
- 4) 佐々木雄太, 山下英生: “アダプティブ二次元有限要素磁界解析のための磁束線を用いた一手法の提案(2)”, 平成21年度 電気・情報関連学会中国支部第60回連合大会講演論文集, No.4-5, p.517, 2009.
- 5) 谷口建男: “FEMのための要素自動分割 デローニー三角分割法の利用”, 森北出版株式会社 (2004)