広島工業大学紀要研究編
第43巻（2009）pp.131-139
論　　　　　文

非定常スペクトル解析理論による構造物の動的特性の同定

中山　隆弘*・鈴木　悠紀賞**・溝畑　陽一***・山光　涼平****

（平成20年10月31日受理）

Identification of Dynamic Characteristics of a Structure Based upon Evolutionary Spectrum Analysis

Takahiro NAKAYAMA *, Yukitaka SUZUKI **, Yoichi MIZOHATA *** and Ryouhei YAMAMITSU ****

（Received Oct.31,2008）

Abstract

This paper presents an identification algorithm of the dynamic characteristics, such as the natural frequency and the damping factor, of a structure deteriorating under natural environment. In this method, both an acceleration record x(t) of a seismic ground motion at the location of the structure and the structural displacement y(t) due to the ground motion are required. In addition, the respective non-stationary spectrum of x(t) and y(t) and the modulating function of x(t) found from evolutionary spectrum analysis are required. The applicability of the proposed method was shown according to the numerical analysis to a one-degree of freedom system. In the case of a multi-degree of freedom system, the dynamic properties of each mode can be obtained by making use of the modal analysis method. However, the identification of the natural modes of the system will be an important task in the future.

Key Words: evolutionary spectrum analysis, dynamic characteristics, infra structures, identification, seismic ground motion.

1. 緒　言

近年わが国では，高度経済成長の時代に大量に建設された社会基盤施設や構造物の多くが老齢期を迎え，それらの健全性を点検によって評価し，不測の事態が生じる前に適切に補修・補強することが極めて重要な課題になってきた。

例えば広島県が管理する橋長2m以上の3536橋の橋梁に限ってみても，その中の1500橋程度が昭和31年～昭和45年に建設されたもので，その中には架設後50年程度を経過しているものも多い[1)]。

さて，構造物の点検方法の中，もっとも簡易な方法は目視点検であるが，鉄筋コンクリート構造の場合には打音法も良く用いられる。一方，費用と時間をより掛けてでも精緻な点検が求められる場合には，超音波や赤外線を利用した機器や磁歪法[2)]による点検が行われる。

しかし，数年に一度程度とはいえ，これらの点検には人

*　広島工業大学工学部都市建設工学科
**　㈱松下産業（元広島工業大学大学院工学研究科土木工学専攻）
***　㈱奥村組（元広島工業大学大学院工学研究科建設工学専攻）
****　広島工業大学大学院工学研究科建設工学専攻

手が掛かり，かなりの費用と時間を必要とする。したがって最近では，できるだけ人手を掛けないで構造物の健全性を評価できるスマートモニタリング[3]に対する要望が強く求められるようになってきた。その場合，構造物に貼付した加速度計などのセンサーによって収録した記録を解析して構造物の力学的特性を同定する技術が必要になってくる。

この同定法についてはこれまでに多数の研究がなされ[4)~13)]，数多くの有益な成果が得られている。しかし，地震国であるわが国では多くの地域がかなりの頻度で地震に見舞われる可能性が高いことを踏まえ，本研究では敢えて地震時の加速度記録とそれに対する構造物の応答変位記録に対する非定常スペクトル解析を行うことによって，その時点における構造物の固有振動数と減衰定数を同定する手法の開発を試みた。

2. 非定常スペクトル解析法

非定常確率過程における位相の非定常性までを考慮できる汎用的な非定常スペクトル解析法[14]が2.1で述べる方法である。物理的解釈が容易で，その定義方法も定常確率過程の拡張として理解しやすいPriestley のevolutionary spectrum 理論[15),16)]にJ.W.Tukey によって開発されたcomplex demodulation 法[17]（以下CD 法と略記する）を適用している。

2.1 非定常パワースペクトル密度関数の定義

非定常離率過程の非定常パワースペクトル密度関数（以下では単に非定常スペクトルという）をPriestly のevolutionary spectrum 理論によって定義する。ただし，本論文で扱う非定常確率過程$X(t)$は時間および周波数に対して，共にゆるやかに変化する確定的な変調関数（modulating function）$A(t,\omega)$によって

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t,\omega)\, e^{i\omega t}\, dz(\omega) \tag{1}$$

と表わされるものとする。ただし式中の$dz(\omega)$は次式を満たす直交関数である。

$$E[dz(\omega_1)\, dz^*(\omega_2)] = \begin{cases} dG(\omega)\ (\omega_1 = \omega_2 = \omega) \\ 0\ (\omega_1 \neq \omega_2) \end{cases} \tag{2}$$

また，$dz^*(\omega)$は$dz(\omega)$の共役複素数である。このときevolutionary spectrum $g_X(t,\omega)$は次式のように定義される。

$$g_X(t,\omega)\, d\omega = |A(t,\omega)|^2\, dG(\omega) \tag{3}$$

2.2 CD 法を用いた非定常スペクトルおよび位相の算定法

式(1)において

$$dF(t,\omega) = A(t,\omega)\, dz(\omega) \tag{4}$$

とおくと

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dF(t,\omega) \tag{5}$$

が得られる。

このとき式(3)より，$x(t)$の非定常スペクトルは

$$g_x(t,\omega)\, d\omega = E\left[|dF(t,\omega)|^2\right] \tag{6}$$

と表わせる。

ここで$dF(t,\omega)$の実部と虚部をそれぞれ，$dF_R(t,\omega)$，$dF_I(t,\omega)$とすれば，式(5)は次式のようになる。

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos\omega t + i\sin\omega t)\{dF_R(t,\omega) + i dF_I(t,\omega)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{dF_R(t,\omega)\cos\omega t - dF_I(t,\omega)\sin\omega t\} \\ &\quad + i\int_{-\infty}^{\infty} \{dF_I(t,\omega)\cos\omega t + dF_R(t,\omega)\sin\omega t\} \end{aligned} \tag{7}$$

しかるに$X(t)$は実関数であるから，式(7)の虚部は0である。すなわち$dF_I(t,\omega)$と$dF_R(t,\omega)$はそれぞれ，ωの偶関数および奇関数となる。したがって式(7)は

$$\begin{aligned} X(t) &= 2\int_0^{\infty} \{dF_R(t,\omega)\cos\omega t - dF_I(t,\omega)\sin\omega t\} \\ &= 2\int_0^{\infty} |dF(t,\omega)|\cos\{\omega t + \varphi(t,\omega)\} \end{aligned} \tag{8}$$

となる。ただし，$\varphi(t,\omega) = \arctan\{dF_I(t,\omega)/dF_R(t,\omega)\}$であり，$\varphi(t,\omega)$は$-\pi \le \varphi(t,\omega) \le \pi$で$dF_I(t,\omega)$と同符号になるように選ぶ。

さらに式(8)の$x(t)$を近似的に次式によって表わす。

$$X(t) = 2\sum_{i=1}^{N} |dF(t,\omega_i)|\cos\{\omega_i t + \varphi(t,\omega_i)\} \tag{9}$$

式(9)にCD 法を適用すれば$|dF(t,\omega_i)|$と$\varphi(t,\omega_i)$が得られ，さらに$|dF(t,\omega_i)|$が求まれば，式(6)によって$X(t)$の非定常スペクトル$g_X(t,\omega_i)$が得られる。

ただし，以降では$\omega > 0$の領域でのみ定義される非定常スペクトル，いわゆる片側スペクトル$f_X(t,\omega)$を$X(t)$の非定常スペクトル$f_X(t,\omega)$と考える。

この場合

$$f_X(t,\omega_i)\,\Delta\omega_i = 2E[|dF(t,\omega_i)|^2] \tag{10}$$

となる。ただし，$\Delta\omega_i$はバンドバスフイルターの帯域である。

以上が非定常確率過程$x(t)$に対する非定常スペクトル解析法であるが，1つの確定時間関数$x(t)$に対しても全く同様のプロセスによって，その非定常スペクトル$f_x(t,\omega)$と位相特性の時間的変化を求めることができる。すなわち，

$$f_x(t,\omega_i)\,\Delta\omega_i = 2\,|\,dF(t,\omega_i)\,|^2 \tag{11}$$

とすればよい。

なお，本研究ではCD法を利用する際に必要なフィルターとしてOrmsbyのフィルターを用いた。その詳細および本方法の妥当性については参考文献[14]に詳述されている。

3. 非定常スペクトル応答解析法および変調関数の算定法

従来，地震動を受ける構造物の応答解析においては，入力としての非定常特性を有する地震動をJenningsの包絡線関数[18]のような振幅の非定常性を表わす確定関数と定常不規則関数の積によって表わすことが多かった。この場合定常不規則変動外力に対するスペクトル応答解析法をそのまま利用することによって構造物の応答の非定常性を算出することができるが，この方法ではあらゆる種類の地震動の非定常性，あるいはそれに対する構造物の応答の非定常性を正確に表現することはできない。これに対し，前述の方法によれば，非定常確率過程としての地震動の振幅，周波数，位相の特性の非定常性を正確に把握できる。

さて，Hammond[19]は，ジェットエンジンの吹き出し口付近の圧力変動を非定常不規則過程とみなして圧力変動解析を行うために，非定常不親則変動外力が非定常スペクトルで表現できるものとして線形1自由度系および線形多自由度振動系の入力・出力関係式を誘導している。しかし，外力の変調関数（modulating function）$A(t,\omega)$については，“$A(t,\omega)$ empirically derived”と述べているように，$\left|A(t,\omega)\right|^2$の平方根としている。すなわち，理論的根拠のない直観的な推論によって変調関数を実関数であるとして非定常スペクトル応答解析を行っている。その後Shinozuka[18]は，応答特性にその前提条件を付加することなく，形式的にはHammondと同様の関係式を導出している。しかし，上述の変調関数の具体的内容についてはなんら触れていない。

3.1 非定常スペクトル応答解析法

前述のように，ShinozukaはHammondの示した非定常不規則過程の入力一出力の関係式をより簡潔な方法で表現した。

いま，非定常不規則過程で与えられる入力$x(t)$が

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t,\omega)\,e^{i\omega t}\,dX(\omega) \tag{12}$$

によって表わされるものとする。式中の$A(t,\omega)$がここで問題としている変調関数であり，$X(\omega)$は直交過程である。そして，この$x(t)$がある線形システムに作用したときの出力$y(t)$も変調関数$G(t,\omega)$と直交過程$Y(\omega)$によって次式のように表わされるものとする。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\omega)\,e^{i\omega t}\,dY(\omega) \tag{13}$$

このとき$y(t)$の非定常スペクトル$f_y(t,\omega)$は$x(t)$の非定常スペクトル$f_x(t,\omega)$とシステムの周波数応答関数$H(\omega)$を用いて

$$f_y(t,\omega) = f_x(t,\omega)\,\frac{|H(\omega)|^2\,|\,G(t,\omega)^2|}{|A(t,\omega)|^2} \tag{14}$$

なる関係式によって算定できる。

したがって$A(t,\omega)$をなんらかの方法によって求めることができれば，次式によって 算定される$G(t,\omega)$を式(14)に用いて$y(t)$の非定常スペクトルを求めることができる。

$$G(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,A(t-\tau,\omega)\,\frac{e^{-i\omega\tau}}{\mathrm{H}(\omega)}\,d\tau \tag{15}$$

ここに$h(\tau)$は単位衝撃応答関数である。

3.2 変調関数の算定法

式(12)で

$$dF(t,\omega) = A(t,\omega)\,dX(\omega) \tag{16}$$

とおけば，式(12)は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,dF(t,\omega) \tag{17}$$

となる。

さらに，

$$dF(t,\omega) = |\,dF(t,\omega)\,|\,e^{i\phi(t,\omega)} \tag{18}$$

とおけば，式(12)の代わりに

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |dF(t,\omega)\,|\,e^{i(\omega(t)+\phi(t,\omega))} \tag{19}$$

が得られる。

ここで$dF_R(t,\omega)$と$dF_I(t,\omega)$をそれぞれ$dF(t,\omega)$の実部と虚部とすれば，

$$\phi(t,\omega) = \arctan\left\{\frac{dF_I(t,\omega)}{dF_R(t,\omega)}\right\} \tag{20}$$

である。

さらに$x(t)$が実関数であることを考えれば，式(19)は次式のようになる。

$$x(t) = 2\int_0^{\infty} |dF(t,\omega)\,|\cos\{\omega t + \phi(t,\omega)\} \tag{21}$$

さらに式(21)の$x(t)$を次式で近似する。

$$x(t) = 2\sum_{i=1}^{N} |dF(t,\omega_i)\,|\cos\{\omega_i t + \phi(t,\omega_i)\} \tag{22}$$

さて，中心周波数がω_iであるような狭帯域バンドパス

フィルターに$x(t)$を通し，得られた成分波を$x_i(t)$と表せば，式(22)より$x_i(t)$は

$$x_i(t)=2\,|\,dF(t,\omega_i)\,|\cos\{\omega_i t+\phi(t,\omega_i)\} \tag{23}$$

と近似的に与えられる。

式(23)の両辺にそれぞれ$\cos\omega_i t$を掛けて右辺を整理すれば，

$$\begin{aligned} x_i(t)\cos\omega_i t=&|\,dF(t,\omega)\,|\,[\cos\phi(t,\omega_i)\\ &+\cos\{2\omega_i t+\phi(t,\omega_i)\}] \end{aligned} \tag{24}$$

となる。同様に$\sin\omega_i t$を掛けると，

$$\begin{aligned} x_i(t)\sin\omega_i t=&|\,dF(t,\omega)\,|\,[-\sin\phi(t,\omega_i)\\ &+\sin\{2\omega_i t+\phi(t,\omega_i)\}] \end{aligned} \tag{25}$$

が得られる。

次に式(24)と式(25)のそれぞれにローパスフィルター処理Fを施して$2\omega_i$の円振動数成分をカットすれば，

$$\left.\begin{aligned} F\{x_i(t)\cos\omega_i t\}&=|\,dF(t,\omega_i)\,|\cos\phi(t,\omega_i)\\ F\{x_i(t)\sin\omega_i t\}&=-|\,dF(t,\omega_i)\,|\sin\phi(t,\omega_i) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

なる関係式が成立する。これより，

$$\phi(t,\omega_i)=\arctan\left[\frac{-F\{x_i(t)\sin\omega_i t\}}{F\{x_i(t)\cos\omega_i t\}}\right] \tag{27}$$

が得られる。

ここで式(20)と式(27)を比較することによって

$$\left.\begin{aligned} dF_R(t,\omega_i)&=F\{x_i(t)\cos\omega_i t\}\\ dF_I(t,\omega_i)&=-F\{x_i(t)\sin\omega_i t\} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

であることが理解できる。

すなわち，$dF(t,\omega_i)$の実部と虚部は$x(t)$に２回のフィルター処理を施すことによって求めることができる。したがってあるω_iの周波数に着目し，それに対する$A(t,\omega_i)$を求めるには次のようにすればよい。

式(16)より，

$$A(t,\omega_i)\,dX(\omega_i)=dF(t,\omega_i)$$

であるから，$A(t,\omega_i)$の実部$A_R(t,\omega_i)$と虚部$A_I(t,\omega_i)$および$dX(\omega_i)$の実部$dX_R(\omega_i)$と虚部$dX_I(\omega_i)$を用いれば，

$$\begin{aligned} \{A_R(t,\omega_i)+iA_I(t,\omega_i)\}\{dX_R(\omega_i)+idX_I(\omega_i)\}\\ =\mathrm{dF_R}(t,\omega_i)+idF_I(t,\omega_i) \end{aligned} \tag{29}$$

となる。そして式(29)の両辺の実部と虚部を対応させれば次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} dX_R(\omega_i) & -dX_I(\omega_i)\\ dX_I(\omega_i) & dX_R(\omega_i) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_R(t,\omega_i)\\ A_I(t,\omega_i) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} dF_R(t,\omega_i)\\ dF_I(t,\omega_i) \end{Bmatrix} \tag{30}$$

したがって，

$$\begin{Bmatrix} A_R(t,\omega_i)\\ A_I(t,\omega_i) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} dX_R(\omega_i) & -dX_I(\omega_i)\\ dX_I(\omega_i) & dX_R(\omega_i) \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} dF_R(t,\omega_i)\\ dF_I(t,\omega_i) \end{Bmatrix} \tag{31}$$

となる。

また$dX_R(\omega_i)$および$dX_I(\omega_i)$は十分長い時間をTとして次式により与えられる。

$$\begin{aligned} dX_R(\omega_i)&=(2\pi/T)\,F_{X,R}(\omega_i)\\ dX_I(\omega_i)&=(2\pi/T)\,F_{X,I}(\omega_i) \end{aligned} \tag{32}$$

ここに，$F_{x,R}(\omega_i)$，$F_{x,I}(\omega_i)$はそれぞれ$x(t)$のフーリエ変換の実部と虚部である。

したがって 2.で述べた方法により$dF_R(t,\omega_i)$と$dF_I(t,\omega_i)$を求めれば，$dF_R(\omega_i)$と$dF_I(\omega_i)$は$\mathrm{x}_i(t)$のフーリエ係数であるから，式(31)によって$A(t,\omega)$の実部と虚部を求めることができる。

このようにして外力$x(t)$の変調関数$A(t,\omega)$の実部$A_R(t,\omega)$と虚部$A_I(t,\omega)$を算出すれば，同定法で必要になる$G(t,\omega)$を式(15)で，応答の非定常スペクトル$f_y(t,\omega)$を式(14)で算定することができる。

4. 同定法

まず式(14)は

$$\frac{f_y(t,\omega)}{f_x(t,\omega)}|\,A(t,\omega)\,|^2=|\,H(\omega)\,|^2|\,G(t,\omega)\,|^2 \tag{33}$$

と変形できる。さらに式(33)を変形すれば

$$\frac{f_y(t,\omega)}{f_x(t,\omega)}|\,A_R+iA_I|^2=|\,H_R+iH_I|^2|\,G_R+iG_I|^2 \tag{34}$$

が得られる。ここに，添え字のRは実部，Iは虚部を表す。さらに変形すると，

$$\frac{f_y(t,\omega)}{f_x(t,\omega)}|\,A_R+iA_I|^2=|\,(HG)_R+i\,(HG)_I|^2 \tag{35}$$

となり，実部と虚部とに分けると次の二つの式が得られる。

$$\sqrt{\frac{f_y(t,\omega)}{f_x(t,\omega)}}\,A_R=(HG)_R \tag{36}$$

$$\sqrt{\frac{f_y(t,\omega)}{f_x(t,\omega)}}\,A_I=(HG)_I \tag{37}$$

また，単位衝撃応答関数を$h(t)$とすれば，不規則な外力$P(t)$が系に作用する場合の系の応答$y(t)$はたたみこみ積分を用いて次式で与えられる。

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)\,P(\tau)\,d\tau \tag{38}$$

式(38)の$P(\tau)$を地震力とみなし，さらに質点の質量をm，地震動加速度を$x(t)$とすれば，式(12)より式(38)は，

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)\left[m\int_{-\infty}^{\infty}A(t,\omega)\,e^{i\omega\tau}\,dX(\omega)\right]d\tau \tag{39}$$

となる。

ここで，式(39)と式(13)より

$$\begin{aligned} y(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,\omega)\,e^{i\omega t}\,dY(\omega)\\ &=\int_0^t h(t-\tau)\left[m\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}(t,\omega)\,e^{i\omega t}\,dX(\omega)\right]d\tau \end{aligned} \tag{40}$$

であることが理解できる。

さらに，$dY(\omega)=H(\omega)\,dX(\omega)$として式(40)を整理すると

$$G(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,A(t,\omega)\,\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{H(\omega)}\,d\tau \tag{41}$$

が導ける。さらに$H(\omega)$を両辺に乗じると

$$H(\omega)\,G(t,\omega)=\int_{0}^{t} h(t-\tau)\cdot m\cdot A(t,\omega)\,e^{-i\omega(t-\tau)}\,d\tau \tag{42}$$

となり，右辺を変形すると近似的に次式が成立する。

$$\begin{aligned}&H(\omega)\,G(t,\omega)=\\&\quad m\sum_j h(t-\tau_j)\,\{A_R(t,\omega)+iA_I(t,\omega)\}\\&\quad[\cos\{\omega(t-\tau)\}-i\sin\{\omega(t-\tau)\}]\,\Delta\tau\end{aligned} \tag{43}$$

このとき右辺の実部は

$$\begin{aligned}(HG)_R=m&\sum_j h(t-\tau_j)\\&\times\Big[A_R(t,\omega)\cdot\cos\{\omega(t-\tau_j)\}\\&+A_I(t,\omega)\cdot\sin\{\omega(t-\tau_j)\}\Big]\Delta\tau\end{aligned} \tag{44}$$

で，虚部は

$$\begin{aligned}(HG)_I=m&\sum_j h(t-\tau_j)\\&\times\Big[-A_R(t,\omega)\cdot\sin\{\omega(t-\tau_j)\}\\&+A_I(t,\omega)\cdot\cos\{\omega(t-\tau_j)\}\Big]\cdot\Delta\tau\end{aligned} \tag{45}$$

となる。ここで，単位衝撃応答関数$h(t-\tau_j)$は

$$h(t-\tau_j)=\frac{1}{m\omega_n{}'}\,e^{-\zeta\omega_n(t-\tau_j)}\sin\omega_n{}'\tau_j \tag{46}$$

$$\omega_n{}'=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{47}$$

で与えられるので，式(44)に式(46)を代入すれば，式(36)より式(48)が得られる。同様に，式(45)に式(46)を代入すれば，式(37)より式(49)が誘導できる。
すなわち，式(36)は

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{f_y(t_i,\omega_k)}{f_x(t_i,\omega_k)}}\,A_R(t_i,\omega_k)=\\&\sum_j\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\exp\{-\zeta\omega_n(t-\tau_j)\}\\&\times\sin\left\{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,(t_i-\tau_j)\right\}\\&\times[A_R(t_j,\omega_k)\cos\{\omega_k(t_i-\tau_j)\}\\&+A_I(t_j,\omega_k)\sin\{\omega_k(t_i-\tau_j)\}]\,\Delta\tau\end{aligned} \tag{48}$$

となり，式(37)は

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{f_y(t_i,\omega_k)}{f_x(t_i,\omega_k)}}\,A_I(t_i,\omega_k)=\\&\sum_j\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\exp\{-\zeta\omega_n(t-\tau_j)\}\\&\times\sin\left\{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,(t_i-\tau_j)\right\}\\&\times[-A_R(t_j,\omega_k)\sin\{\omega_k(t_i-\tau_j)\}\\&+A_I(t_j,\omega_k)\cos\{\omega_k(t_i-\tau_j)\}]\,\Delta\tau\end{aligned} \tag{49}$$

となる。

式(48)，式(49)のω_kは着目周波数(rad/s)，τ_iは着目時間(s)である。

この二つの式より，振動系の固有円振動数ω_nと減衰定数ζを同定するための式(50)が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{f_y(t_i,\omega_k)}{f_x(t_i,\omega_k)}\Big|A_R(t_i,\omega_k)^2+A_I(t_i,\omega_k)^2\Big|=\\&\left[\begin{aligned}&\sum_j\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\exp\{-\zeta\omega_n(t-\tau_j)\}\\&\times\sin\left\{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,(t_i-\tau_j)\right\}\\&\times[A_R(t_j,\omega_k)\cos\{\omega_k(t_i-\tau_j)\}\\&+A_I(t_j,\omega_k)\sin\{\omega_k(t_i-\tau_j)\}]\,\Delta\tau\end{aligned}\right]^2\\&+\left[\begin{aligned}&\sum_j\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\exp\{-\zeta\omega_n(t-\tau_j)\}\\&\times\sin\left\{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,(t_i-\tau_j)\right\}\\&\times[-A_R(t_j,\omega_k)\sin\{\omega_n(t_i-\tau_j)\}\\&+A_I(t_j,\omega_k)\cos\{\omega_k(t_i-\tau_j)\}]\,\Delta\tau\end{aligned}\right]^2\end{aligned} \tag{50}$$

式(50)には同定前には当然未知量である固有円振動数ω_nと減衰定数ζの2つが含まれているので，本研究ではそれらを試行錯誤法により求めることにした。

左辺の$f_y(t,\omega)$は応答変位$y(t)$の非定常スペクトル，$f_x(t,\omega)$は入力地震動の加速度$x(t)$の非定常スペクトル，また$A_R(t,\omega)$，$A_I(t,\omega)$はそれぞれ$x(t)$の変調関数の実部と虚部であり，地震動加速度とその応答変位の非定常スペクトル解析によってすべて求めることができる。したがって，右辺の値が左辺の値に一致するようにω_nとζを試行錯誤的に求めれば，それによって線形1自由度振動系の固有円振動数と減衰定数を同定することができる。

5. 線形1自由度振動系の動的特性の同定

5.1 概要

式(50)の同定式に基づいて地震動の作用を受ける線形1自由度振動系のモデルに対する数値解析を行った。すなわち，本来であれば観測によって得られる応答変位$y(t)$については，実測データではなく，あらかじめ固有振動数と減衰定数が既知である振動系の$y(t)$を時刻歴地震応答解析によって求めておいたものを使用した。そのことによって本同定法の妥当性を検証することとした。

5.2 数値解析

1）解析モデル

解析モデルの固有振動数f_n(Hz)および減衰定数ζについては，それぞれ2.5Hz，0.04とした。また，入力地震波は図－1～図－3に示すように，EL-Centro地震波（NS成分），兵庫県南部地震波（神戸海洋気象台地盤上記録：

NS 成分），宮城県沖地震波（開北橋周辺地盤上記録： NS 成分）とした。なお，各図には，時刻歴応答解析によって求めた振動系の応答変位 $y(t)$ も示している。

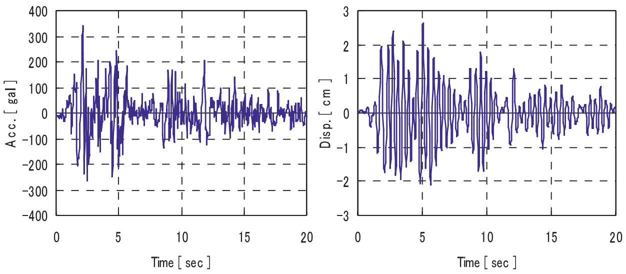
2）解析結果

各地震波の非定常スペクトルと変調関数をそれぞれ 2.2 と 3.2 で述べた方法で，さらには応答変位の非定常スペクトルを 2.2 に従って求め，式(50)によって振動系モデルの固有振動数と減衰定数を同定した。結果は次の通りである。

まず，図－4(a)に EL-Centro 地震波に対する結果の一部を示す。図中の注釈欄で「左辺」として示した曲線は，式(50)の左辺における着目周波数 ω_k を $2\pi \times 2.5 = 5\pi\ (rad/s)$ としたものであり，「$h = 0.02 \sim 0.06$」として示した各曲線は，同式の右辺の ω_n を $5\pi\ (rad/s)$ と設定し，減衰定数 h をそれぞれ $0.02 \sim 0.06$ として描いたものである。もちろん，この図は ω_k を，$2\pi \times 2.45 = 4.9\pi\ (rad/s)$，あるいは，$2\pi \times 2.55 = 5.1\pi\ (rad/s)$ などとして解析した中から「左辺」と「右辺」がもっとも良く一致したものを選んだものであり，この図より，ω_n が $5\pi\ (rad/s)$，減衰定数 h が 0.04 のときに「左辺」と「右辺」が極めて良く一致していることが分かる。

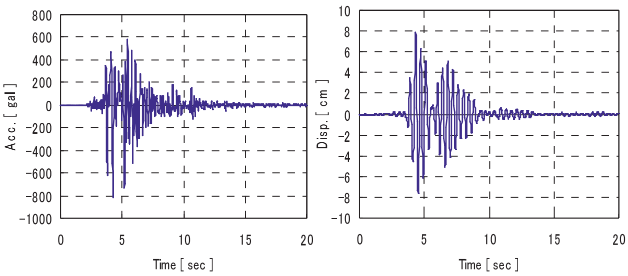
同様に図－4(b)および図－4(c)は，それぞれ兵庫県南部地震波，宮城県沖地震波に対する結果である。これらの図からも ω_n が $5\pi\ (rad/s)$，減衰定数 h が 0.04 のときに「左辺」と「右辺」が良好に一致していることが理解できる。

このように，式(50)の同定式によれば，地震波の特徴に関わらず振動系の固有振動数と減衰定数を精度良く同定で



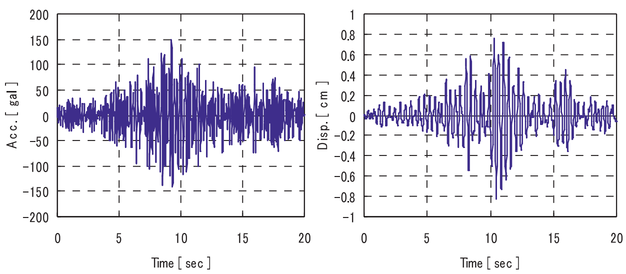
入力加速度　　応答変位

図－1　EL-Centro 地震波



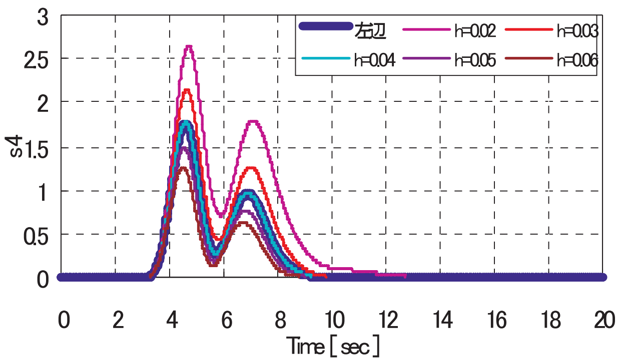
入力加速度　　応答変位

図－2　兵庫県南部地震波

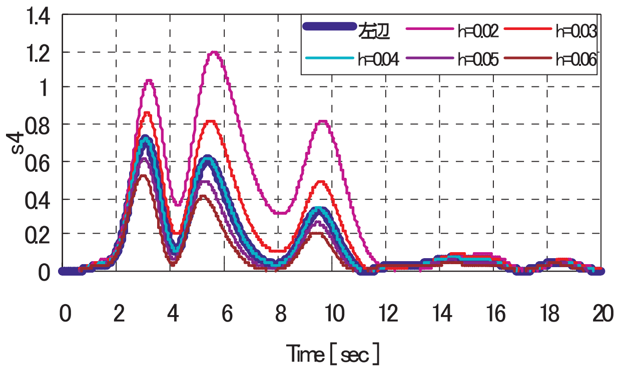


入力加速度　　応答変位

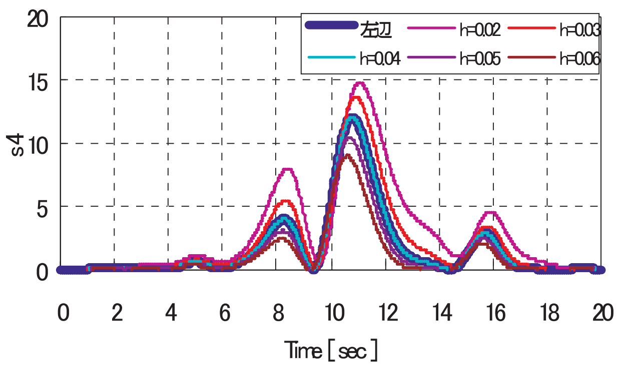
図－3　宮城県沖地震波



(a) EL-Centro 地震波



(b) 兵庫県南部地震波



(c) 宮城県沖地震波

図－4　解析結果

きることが明らかとなった。

6. 線形2自由度振動系モデルに対する同定法

6.1 概要

上述のように，線形1自由度振動系でモデル化できる構造物については，式(50)によって固有振動数と減衰定数を高精度で同定できる。しかし，1自由度でモデル化できる構造物は限られているので，ここでは線形多自由度振動系モデルへの拡張を念頭において線形2自由度振動系の動的特性の同定法について言及する。

6.2 同定法

モード解析の概念に従えば，地震加速度$\ddot{\phi}(t)$の作用を受ける線形2自由度振動系におけるs次モード($s=1,2$)の振動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{q}_s(t)+2h_s\omega_s\dot{q}_s(t)+\omega_s^2 q_s(t)=-\beta_s\ddot{\phi}(t) \tag{51}$$

式中のq_s，ω_s，h_s，β_sは，それぞれs次モードの基準座標，固有円振動数，減衰定数，刺激係数である。

このとき，質点iの変位$y_i(t)$は式(52)によって計算できる。

$$y_i(t)=\sum_{s=1} q_s(t)\,Y_{is} \tag{52}$$

式中のY_{is}は固有モード行列$[Y]$の各要素である。したがって，式(53)によれば，地震時における両質点の変位から基準座標$q_1(t)$と$q_2(t)$が計算できる。

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{Y_{11}-Y_{12}}\begin{bmatrix} 1 & -Y_{12} \\ -1 & Y_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \tag{53}$$

このとき，式(51)が線形1自由度振動系の振動方程式と等価であることを考えれば，式(50)の同定式によってω_sとh_sを同定することができる。

6.3 数値解析

1）解析モデル

6.2で示した同定法の妥当性を数値解析によって検証することを目的にして，図－5に示す線形2自由度振動系モデルに対する解析を行った。

固有値解析の結果，振動系の1次および2次の固有振動数はそれぞれ0.852Hzおよび2.23Hzである。また，固有モード行列は式(54)の通りである。

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.618 & -1.618 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \tag{54}$$

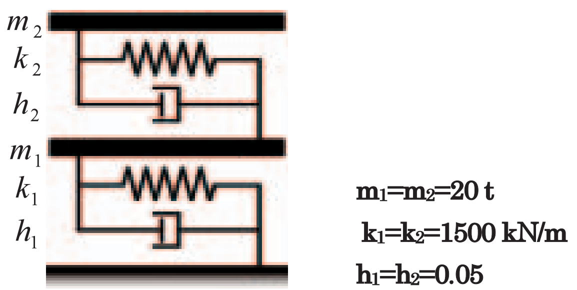
なお，入力地震波については前節で示したEL-Centro地震波（NS成分）を用いた。この場合も図－6に示すように時刻歴応答解析によって$y_1(t)$と$y_2(t)$をあらかじめ計算しておき，それらを実測データとみなすことにした。

2）解析結果

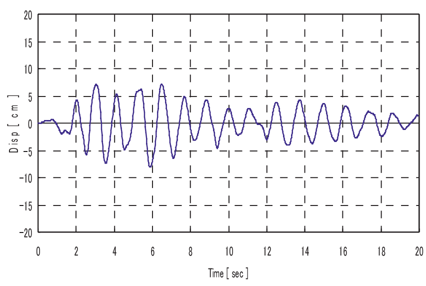
まず1次モードの結果を図－7(a)～(c)に示す。これらは，それぞれ式(50)（ただし，xを$\beta_1\ddot{\phi}$に，yをq_1に置き換えて適用する必要がある）の右辺の固有振動数および減衰定数を0.800Hz，0.852Hz，0.900Hzと仮定したときの結果である。図－7(b)の結果より，仮定した固有振動数と減衰定数がモデルに等しい場合のみ，振動の継続時間全体の時間領域で両辺の値がよく一致していることが分かる。

また2次モードについても図－8(a)～(c)のように，同様の結果が得られている。したがって，6.2の方法を用いることで，線形2自由度振動系の場合でも，1次モードおよび2次モードの各固有振動数と各減衰定数を同定することが可能であると考えられる。

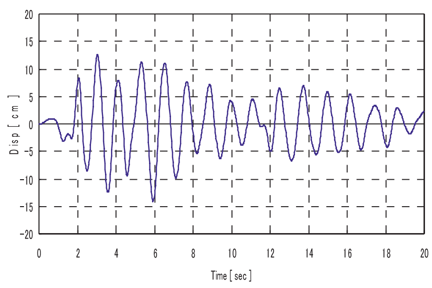
ただし，実際の構造物の場合，固有モード行列についても未知であり，この問題の克服が今後の課題となる。



図－5　解析モデル



(a)　$y_1(t)$



(b)　$y_2(t)$

図－6　各質点の応答変位

7. 結　言

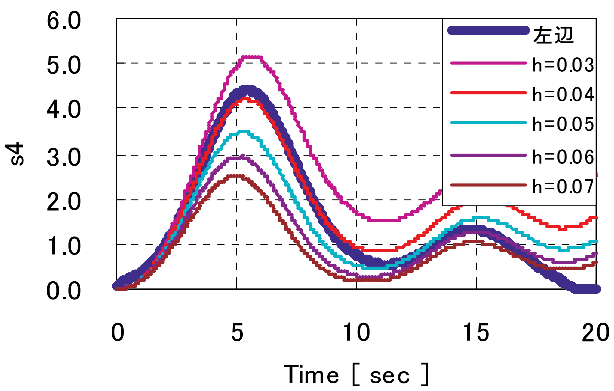
本論文では非定常スペクトル解析理論を活用することにより，地震動を受ける際の構造物の応答観測記録を用いてその動的特性を同定する方法を提案し，数値解析の結果に基づいてその妥当性を示した。

得られた結論を要約すれば次の通りである。

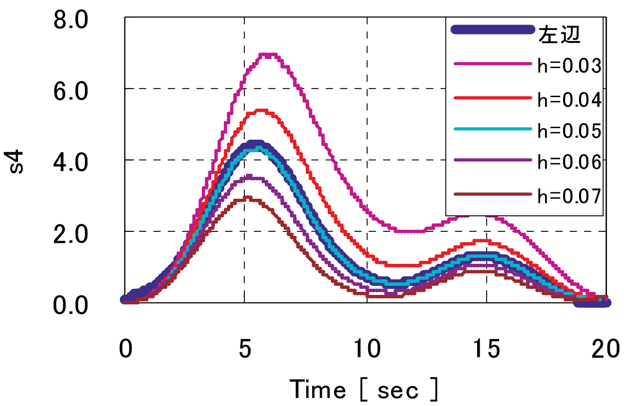
1）線形1自由度振動系でモデル化できる構造物であれば，地震動の加速度記録とそれによる振動系の変位記録の非定常スペクトル解析を行うことで固有振動数と減衰定数を精度良く同定できる同定式を誘導した。

2）あらかじめ固有振動数と減衰定数が既知の振動系モデルと複数の地震動に対する数値解析により，誘導した同定式の妥当性を検証した。

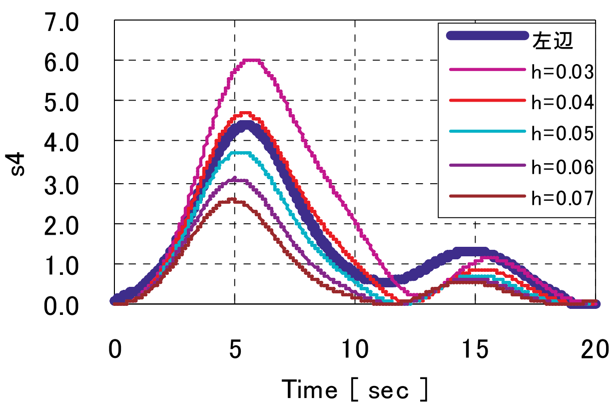
3）副次的ではあるが，2)の結論は，文献21)において提案した地震動の変調関数の算定法が妥当であることを



(a) 仮定固有振動数 0.800Hz

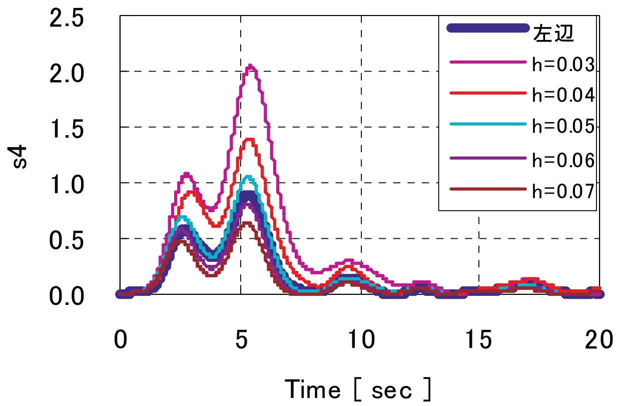


(b) 仮定固有振動数 0.852Hz

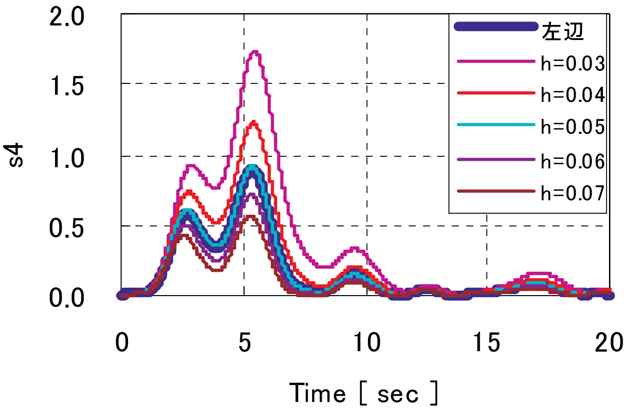


(c) 仮定固有振動数 0.900Hz

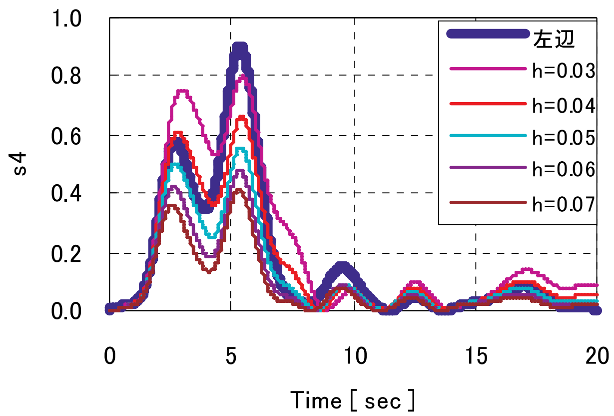
図−7　1次モードに対する解析結果



(a) 仮定固有振動数 2.10Hz



(b) 仮定固有振動数 2.23Hz



(c) 仮定固有振動数 2.30Hz

図−8　2次モードに対する解析結果

示している。

4) モード解析理論による線形多自由度振動モデルの固有振動数および減衰定数の同定法を示した。ただし，固有モード行列の同定法が今後の重要な課題として残された。

なお，ここでは，できるだけ本論文のみで研究内容が理解できるよう，「土木学会論文集」に登載された論文の一部についても示したことを断りしておく。

謝　　　辞

藤原建築事務所　藤原豪紀博士には，研究遂行上欠かせない解析プログラムを提供していただくなど，絶大なるご支援をいただいた。記して深甚なる謝意を表したい。また，本研究着手の時点でご協力をいただいた，当時本学大学院に在籍していた松井稔昌氏（広建コンサルタンツ㈱）および山之内　啓二氏（日本電子計算㈱）にも本紙面を借りて心より御礼を申し上げる。

参 考 文 献

1) 広島県橋梁維持管理検討委員会報告書，広島県土木部道路保全室，2007.3.
2) 田村雄歩，岩上　明，松岡　敬，中山隆弘：新しい鋼構造物応力測定法，土木学会第62回年次学術講演会講演概要集，Ⅰ-379，pp.753-754，2007.9.
3) 中山隆弘：全体的動向の解説，Intelligent Bridge/Structure and Smart Monitoringに関する公開講演会資料（構造工学技術シリーズNo.12），土木学会構造工学委員会，1997.10.
4) 奥松俊博，岡林隆敏，中　忠資，下妻達也，古賀進一：遠隔モニタリングシステムによる鋼ランガー桁橋振動数の長期観測，土木学会第62回年次学術講演会講演概要集，I-406，pp.807-808，2007.9.
5) 星谷　勝，斉藤悦郎：拡張カルマンフィルタを用いた同定問題の各種振動系への応用，土木学会論文集，No.339，pp.59-67，1983.11.
6) 星谷 勝，丸山　收：非線形構造系の地震時挙動特性の同定，土木学会論文集，No.386/I-8，pp.397-405，1987.10.
7) 瀧本　幸，星谷　勝：カルマンフィルタを用いた非線形構造物の同定，土木学会論文集，No.556/I-38，pp.179-187，1997.1.
8) 佐藤忠信，竹井賢二：構造物の非定常動特性の漸化型同定法，土木学会論文集，No.577/I-41，pp.65-73，1997.10.
9) 佐藤忠信，梶　啓介：非線形構造物システムの線形同定，土木学会論文集，No.647/I-51，pp.155-165，2000.4.
10) 神田　順：一般建築物における地盤を考慮した動的振動モデルに関する研究，平成9年度～平成11年度科学研究費補助金研究報告書，2000.10.
11) 安藤幸治，岩楯尚広：時間領域のモード解析による振動系の動的特性の同定とその適用，土木学会論文集，No.450/I-20，pp.151-160，1992.7.
12) S. Hoffmann, K. Bergmeister, A.Strauss and M. Presmayr: Identifying stiffness distribution by direct influence measurements, Proc. of the 10th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, pp.589-590, Taylor & Francis, 2007.
13) G. S. Wang and F. K. Huang: Application of genetic algorithm and local search method to structural dynamic system identification, Proc. of the 10th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, pp.591-592, Taylor & Francis, 2007.
14) 小松定夫，藤原豪紀，中山隆弘：コンプレックス・ディモデュレーション法による地震動の非定常スペクトル解析，土木学会論文集，第368号/Ⅰ-5，pp.311-318，1986.4.
15) Priestley, M. B. : Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes, Jour. R. Statist. Soc. Ser. B, Vol.27, pp.204-237, 1965.
16) Priestley, M. B.: Power Spectral Analysis of Non-stationary Random Processes, Jour. Sound Vib., Vol.6, No.1, pp.86-97, 1967.
17) Granger, C.W.J. : Spectral Analysis of Economic Time Siries, Princeton Univ. Press, Chapt. 9, 10, 1964.
18) Jennings, P. C., et al. : Simulated Earthquake Motions, Earthquake Engineering Laboratory, CIT, Apr., 1968.
19) Hammond, J. K. : On the Response of Single and Multi-degree of Freedom Systems of Non-satationary Random Excitations, J. Sound Vib., Vol.7, No.3, pp.393-416, 1968.
20) Shinozuka, M. : Random Processes with Evolutionary Power, Proc. of the ASCE, Vol.96, EM4, pp.543-545, 1970.
21) 中山隆弘，小松定夫，角田直行：構造振動系の非定常スペクトル応答解析法について，土木学会論文集，第374号/Ⅰ-6，pp.541-548，1986.10.