

多面体の塗り分け

殿塚 勲*・村上 智秋**

(平成20年10月10日受理)

Polyhedron Coloring

Isao TONOZUKA, Chiaki MURAKAMI

(Received Oct. 10, 2008)

Abstract

This paper deals with the coloring of polyhedrons. The famous four-color theorem comes into effect for polyhedrons as well as the 2-dimensional maps. However, the more the faces of polyhedrons the more complicated, and it becomes almost impossible to solve the four-color problem. A systematic procedure or an algorithm is needed for this problem. Our proposals on the problem are applied to the regular polyhedrons and delta polyhedrons.

Key Words: polyhedron, coloring, four-color problem, four-color theorem, regular polyhedron, delta polyhedron

1 はじめに

地図を色で塗り分けをするとき、隣接の国が相異なる色になるようにする問題を考える。ここで一つの国には飛び地は無いのと仮定する。このとき地図を塗り分けするに際し、何色あればこの要求を満たすことができるであろうか。この問題は実用的な関心もあり長い歴史の中で、経験的に4色あれば隣接の国が同じ色にならないように色分けできることが確からしいことが分かってきた。(ガスリー(1852))

この問題を四色問題^[1]という。この問題にはプロだけでなくアマチュアも興味を抱くこととなり、多くの数学者や好事家が参加したが、4色以内で塗り分けができる、という「四色定理」の最終的な証明はアップル、ハーケン(1976)まで実に100年以上の道のりがあった。しかも最終的な証明はコンピュータを駆使した「力技」に依ったので、多くの数学者からは反感をもたれることとなった。し

かし、その証明は多くの数学者から正しいものと評価されている^[1]。

ここでは多面体の塗り分けを扱い、平面の地図と同様に隣接の面が同じ色にならないように塗り分けるものとする。

この問題は立体である多面体を平面に射影すれば、多面体の塗り分けは平面上の地図の塗り分けとほぼ同じ扱いができる。(Cauchy)したがって「四色定理」により与えられた多面体を4色以内で塗り分けすることができるのは当然であるが、その具体的な実現方法は自明ではない。多面体が複雑になると4色以内での塗り分けは行き当たりでは不可能であるほどの困難さが生じる。

ここでは実際の色分け作業のために系統的な手順を示し、さらに多面体により2色で済む場合、3色で済む場合、4色を必要とする場合などについても考察する。

多面体には5種類の正多面体、13種類の準正多面体^[4]、8種類のデルタ多面体、その他 Zalgaller 多面体(すべての面が正多角形である凸多面体、92種)^{[3][2]}やそれらの

* 広島工業大学情報学部知的情報システム学科

** 広島工業大学情報学部知的情報システム学科学部生

星形化などが知られているが、ここでは正多面体とデルタ多面体（すべての面が正三角形の多面体）に限っておく。

なお以下の考察では、多面体を2色（3色，4色）で塗り分けができれば3色（4色，5色）以上でも塗り分け可能である，ということを目明のこととする。

2 基礎的な考察

多面体の塗り分けは（2次元の）地図の塗り分けと基本的には同じ問題である。多面体は角点（かどてん），稜線（りょうせん），面などを属性として持つ。角点につながる稜線の形から図1，図2，図3などに分類し，多角形の周りの稜線の形から図4，図5，図6に分類する。以下には正多面体に含まれる図の番号と塗り分けに必要な最低の色数をまとめた。

正四面体	図1，図4	4色
正六面体	図1，図5	3色
正八面体	図2	2色
正十二面体	図1，図6	4色
正二十面体	図3	3色

多面体の塗り分けに必要な色の種類は上の表の色数を下限とする。ここで図4は4色問題の発祥となったといわれるド・モルガン^[1]の手紙に現れる図7と同型であって，この手紙には「塗り分けのために5色以上が必要とされる地図は作れそうにない」とある。ド・モルガンにこのことを指摘したのは当時の学生のフランシス・ガスリーであり，彼が4色問題の考案者とされている。

3 多面体を記述するデータ構造と塗り分けアルゴリズム

頂点の座標値（実数値） 頂点座標や面などを配列により表現する際，変数名とインデックスを $t_{i,r}$ のように書くべきであるが，ここではC言語によるプログラミングを念頭におき

$$t[i][r] \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1), \\ (r = 0, 1, 2)$$

のような書き方をする。

ここで i は多面体の頂点につけた番号であり，頂点の数は n_i 個とする。 r はその3次元座標 x, y, z の成分である。

面を構成する頂点の番号（整数値）

$$m[j][k] \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n_m - 1), \\ (k = 1, 2, \dots, n_j)$$

多面体の面の数を n_m 個とし，面につけた番号を j とする。 k はその面を構成する多角形の n_j 個の頂点の座標番号であ

り，多角形の周囲を順に番号づけられているものとする。また面 j の多角形の頂点の数は

$$m[j][0]$$

に格納する。

1つの面に隣接する面の番号と色番号（整数値）

$$c[j][k] \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n_m - 1), \\ (k = 1, 2, \dots, n_j)$$

面 j を構成する頂点の数と隣接する面の数 n_j は同じなので， $m[j][k]$ と同じインデックスを用いている。 j を与えたときの $(k = 1, 2, \dots, n_j)$ に対する $c[j][k]$ は面 j に隣接する k 番目の面を表わし

$$c[j][0] \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n_m - 1)$$

には面 j の色番号を格納する。したがって面 j に隣接する面 k の色番号は

$$c[c[j][k]][0] \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n_m - 1), \\ (k = 1, 2, \dots, n_j)$$

となる，すなわち面 j に隣接する面 k の番号を $u = c[j][k]$ とおくと， j に隣りあう面 k の色番号は $c[u][0]$ となる。

多面体のグラフィックス表示

多面体をグラフィックス表示するには上記 $t[i][r]$ ， $m[j][k]$ ， $c[j][k]$ があれば可能である。

このうち $t[i][r]$ ， $m[j][k]$ の2つは，Zalgaller多面体については小林等^[3]により計算されて，ファイルの形で提供されているので，これを利用する。

$c[j][k]$ に関し， $k = 0$ を除いた $(j = 0, 1, 2, \dots, n_m - 1)$ ， $(k = 1, 2, \dots, n_j)$ についてはデータ $m[j][k]$ を用いて容易に求めることができる。以後面 j の色番号

$$c[j][0] \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n_m - 1)$$

を，隣接する面の色が同じにならないように求める方法について考える。

色の塗り分けアルゴリズムの例 正六面体の面の塗り分けを例として，塗り分けアルゴリズムを表1により説明する。6つの面には0から5まで番号をつけ，それぞれの面に隣接する面の番号の表（隣接面(1)）を作る。0面から始めて順に5面まで色を定めてゆくので，それまでに色が決定された面番号だけを記した表を隣接面(2)として作成した。

色は4種あればよいので色の番号を0, 1, 2, 3とする。0面の色は任意なので，例えば色0とする。1面の色は隣あう0面と異なるように決めれば任意でよいので色1とする。2面は0, 1面の色01と異なるように色を決めてばよ

表 1 : 正六面体の色決定

面番号	隣接面 (1)	隣接面 (2)	色 (数値は面の順につけた色番号)
0	2 3 5 1		0
1	0 5 4 2	0	01
2	1 4 3 0	1 0	012
3	2 4 5 0	2 0	0121 0123
4	2 1 5 3	2 1 3	01210 01213 01230
5	0 3 4 1	0 3 4 1	012102 012103 012132 012302

表 2 : 正多面体の立体図と射影図

正多面体	立体図	射影図	塗り分けに必要な色の種類
正 4 面体	図 9a	図 10a	4
正 6 面体	図 9b	図 10b	3
正 8 面体	図 9c	図 10c	2
正 12 面体	図 9d	図 10d	4
正 20 面体	図 9e	図 10e	3

いので 2, 3 の 2 種の色があるが, 2 に固定しても一般性を失わないので面 012 の順に色は 012 となる。次に 3 面は 2, 0 面の色と異なる色を選ぶので 1, 3 の 2 種の可能性があり 0121 と 0123 となる。

以下同様にして最終的に色の欄の 5 面の色まで決定でき, このうち 012102 が 3 色による塗り分けであり他は 4 色が必要となる。

3 色で塗り分けが可能であれば, 4 色以上を用いても塗り分けが可能であることは自明なので最小数の色での塗り分けを探す。

色の塗り分けアルゴリズム 上の例のように色の塗り分けだけであればデータ $c[j][k]$ があればよい。 $c[j][k]$ は面番号 j に隣接する面の番号 ($k = 1, 2, \dots, n_j$) である。

- 面番号 0, 1, 2... の順に色を決める。面 j の色を決めるときそれより前に決めた面の色だけに影響されるので, 表 1 の隣接面 (1) のうち既に決まった色を隣接面 (2) ($\tilde{c}[j][k]$ と書く) とし, これとは異なる色を選んで次の面の色を決定する。
- 面 $j = 0$ の色を $c[0][0] = 0$ とおく。
- 面 $j = 1$ の色は隣接面 (2) $\tilde{c}[0][k]$, ($k = 1, 2, \dots, n_0$) を調べ, 面 0 と異なるように色番号 $c[1][0]$ を選ぶ。
- 面 j の色は $\tilde{c}[j-1][k]$ ($k = 1, 2, \dots, n_{j-1}$) を調べ, 面 $j-1$ と異なるように色番号 $c[j][0]$ を選ぶ。

5. 4. を $j = n_m - 1$ まで繰り返す。

上記は, これから面 j の色を決めるとき, 「その隣接面の中に既に決定されたものがあればそれとは異なる色を選ぶ」を定式化したものであり, 面 0, 1, ..., $n_m - 1$ の順に色は

$$c[0][0], c[1][0], \dots, c[n_m - 1][0]$$

が定まる。

4 2 次元平面への射影

多面体の塗り分けをしてこれをそのまま見ても裏面が見えない。そこで多面体を 2 次元平面に射影して全ての面が見えるようにする。複素関数論では複素平面の全体を中心 $(0, 0, \frac{1}{2})$, 半径 $\frac{1}{2}$ の球の表面に対応させることが行われる。(Riemann 球)

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (1)$$

この球面の頂点 $(0, 0, 1)$ から球面上の点 (x, y, z) を突き抜けて $z = 0$ 平面に向けて直線を引くと平面 (X, Y) の座標は

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z} \quad (2)$$

に対応し, $(0, 0, 1)$ を除いて球面と平面が 1:1 に対応する。

これを多面体に適用するために, 多面体の座標中心が $(0, 0, 0)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の球に納まるように規格化し, この中心を z 方向に $\frac{1}{2}$ 持ち上げたうえで (1) を適用して 2 次元の (X, Y) 平面上に射影する。ここで多面体中で最も $z = 1$ に

表 3 : デルタ多面体の立体図と射影図

デルタ多面体	立体図	射影図	塗り分けに必要な色の種類
デルタ 6 面体	図 11a	図 12a	3
デルタ 10 面体	図 11b	図 12b	3
デルタ 12 面体	図 11c	図 12c	3
デルタ 14 面体	図 11d	図 12d	3
デルタ 16 面体	図 11e	図 12e	3

近い面を (X, Y) 平面に平行になるように選ぶとき (これを基準面を選ぶ), (X, Y) 平面に射影された面の数は多面体の面の数より 1 だけ少ない図形となる。(図 8)

なお, 多面体の形によってはうまく射影面の数が 1 少ない図形とはならないこともあり, このときは(1)ではなしに関数

$$X = x(1 + az), Y = y(1 + bz) \quad (3)$$

を用いてパラメータ (a, b) をうまく選んできれいな 2 次元射影図を作ることもある。

5 まとめ

5 種類の正多面体は表 2 のように, 正六面体は 3 色, 正八面体は 2 色, 正二十面体は 3 色で塗り分けができるが, 正四面体と正十二面体は 4 色必要である。これは 2. 基礎的な考察での結果と一致する。

図 9a ~ 図 9e は正多面体の立体図であり, 図 10a ~ 図 10e はそれらの 2 次元への射影図である。正多面体の面数を n とすると, 射影図には $n - 1$ の領域があるが, 最後の n

面は外部の領域に対応する。

デルタ多面体とはすべての面が正三角形でできている多面体で 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20 の 8 種類があり, このうち 4, 8, 20 は正多面体であって表 2 に含まれるので, 残りのデルタ多面体を表 3 に示した。

デルタ多面体の立体図は図 11a ~ 図 11e であり, その射影図を図 12a ~ 図 12e に示した。デルタ多面体では, $n = 4$ の正四面体を除きすべて 3 色で塗り分けが可能である。

参考文献

- [1] ロビン・ウィルソン, 茂木健一郎訳, 四色問題, 新潮社 (2004.11)
- [2] 関口次郎, 多面体の数理とグラフィックス, 牧野書店 (1996.2)
- [3] 小林光夫・鈴木卓治「正多角形を面にもつすべての凸多面体の頂点座標の計算」電気通信大学紀要, 第 5 巻 (1992), p147-184
- [4] 一松信, 正多面体を解く, 東海大学出版会 (1983.6)

多面体の塗り分け



図 1



図 2



図 3



図 4

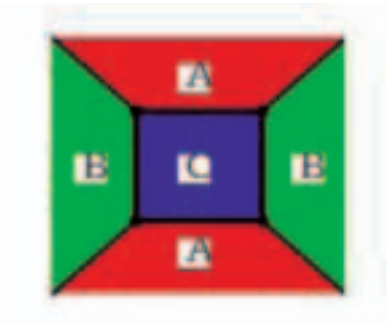


図 5



図 6



図 7



図 8



図 9a

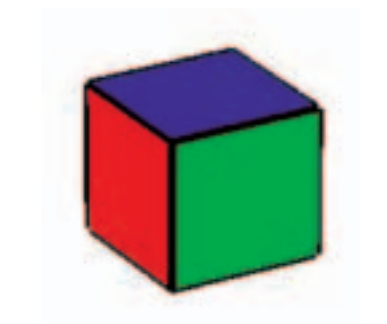


図 9b

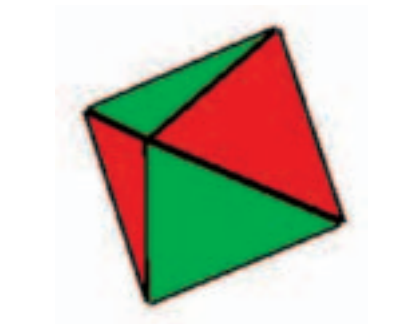


図 9c



図 9d



図 9e



図 10a



図 10b



図 10c



図 10d



図 10e



図 11a



図 11b



図 11c

多面体の塗り分け



図 11d



図 11e



図 12a



図 12b



図 12c



図 12d



図 12e