# ニューラルネットワーク補償器を用いた制御性能の向上について\*

川辺 尚志\*・築山 直樹\*\*・大和 慶彦\*\*\*

(平成19年9月25日受理)

On the Improvement of the Control Performance by Using a Neural Network Compensator

Hisashi KAWABE\*, Naoki TSUKIYAMA\*\* and Yoshihiko YAMATO\*\*\*

(Received Sept.25,2007)

## Abstract

The effect of utilizing a neural network (N.N.) compensator on the simultaneous control performance in a multi-degree-of-freedom mechanical system is investigated using a cantilevered-beam vibration system, a crane system having a motor-driven cart suspended by a single pendulum, and an inverted pendulum one. A 3-layer-type neural network compensator is used together with a model-based controller such as a LQ controller and an  $H^{\infty}$  one. Both from aspects of simulation and experiment, it is found that the robust active damping due to the N.N. compensator is obtained as  $SDC_{\max} \approx 0.14$ , and also that the improvement of robustness against parameter variations and disturbances can be seen on the simultaneous control between the mechanical position and residual vibrations.

Key Words: :motion control, neural network compensator, LQ controller,  $H^{\infty}$  controller, Robustness, vibration control, active vibration damping, simultaneous control

## 1.緒 言

多機能化に伴う機構運動の自由度の増加は、摩擦やガタ 等の非線形要素によるモデル化の難しさをもたらすため、 モデルベースの従来的制御手法だけでは十分な制御性能の 維持が期待できない。このように従来的制御設計が困難な 場合でも適用可能なニューラルネットワーク(*N.N.*)に基 づく制御法が、その適応性や学習性に注目され紹介されて いる<sup>1,2)</sup>。

本研究は,機構の高速位置決めと内在する要素の振動と の同時制御性の観点から,まず片持ち梁振動系での N.N.

## 2. モデリングと制御則

#### 2.1 片持梁振動系モデリング

図1に示すように,主振動系質量m<sub>1</sub>と吸振用質量m<sub>2</sub>との電磁的相互作用力を制御力u(t)とする縦型片持梁振動 系を制振対象とする。厳密には振動系本体質量m<sub>1</sub>と補助質

による能動的制振性を,次に多自由度・柔構造振子系とし てのクレーン系と倒立振子系での位置決めと振子制振の同 時制御性向上の観点から,モデル基制御器に対するN.N.補 償器併用の効果を,パラメータ変動や定値外乱に対するロ バスト安定性の面から検討する

<sup>\*</sup> 広島工業大学工学部知能機械工学科

<sup>\*\*</sup> 広島工業大学大学院工学研究科機械システム工学専攻(現, ㈱新くるしま)

<sup>\*\*\*</sup> 広島工業大学大学院工学研究科機械システム工学専攻(現、㈱シンコー)

<sup>#</sup>第14回振動減衰国際会議(ICIFUAS-14(Kyoto,2005)),および第12回知能メカトロニクスワークショップ(2007,広島工大)でそれぞれ 一部発表

(2)



Fig.1 Schematic illustration for an active vibration control system

量  $m_2$  の 2 自由度系であるが,これを  $m=m_1+m_2$  の 1 自 由度系での近似モデリングとする。減衰係数比を  $s=3.1\times$  $10^{-3}$ ,固有角振動数を  $\omega_n=19.8[rad/s], m_1=2.9[kg],制御$ 入力 <math>u と実機相互作用力fとの換算係数をkfとするとき

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{1}$$

f = kfu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -391.1851 & -0.1213 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3448 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(3)

## 2.2 クレーン系と倒立振子系モデリング

クレーンモデルを図2に示す。



Fig.2 Scheme of a crane (a) and an inverted pendulum (b) model

各パラメータを。

M
 : 台車系の等価質量 4.4[kg]

 g
 : 重力加速度 9.8[m/s<sup>2</sup>]

 F
 : 台車系の摩擦係数 19.2[Ns/m]

 S(t)
 : 時刻tにおける台車の位置

 
$$u(t)$$
 : モータの入力電圧[V]

 mb
 : 質量 2.97×10<sup>-2</sup>[kg]

 l
 : 振子長 0.3[m]

  $\theta(t)$ 
 : 時刻における振子角[rad]

 J
 : 振子の重心回りの慣性モーメント  
7.56×10<sup>-2</sup>[kg·m<sup>2</sup>]

 c
 : 振子の摩擦係数 1.98×10<sup>-3</sup>[Ns/m]

とするとき,システム行列Aおよび入力ベクトルbは,ク レーン系では

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20.9201 & 0 & -0.5340 & 9.2320 \\ 0.037283 & 0 & 0.00095 & -4.3412 \end{bmatrix},$$
(5)

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.4815 \\ 2.5776 \end{bmatrix}$$
(6)

一方, 倒立振子系では(装置パラメータが若干異なり)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 30.8241 & 0 & -0.00670 & 13.4200 \\ -0.1575 & 0 & 0.00034 & -4.3352 \end{bmatrix},$$
(7)

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0\\0\\-14.042\\4.5362 \end{bmatrix} \tag{8}$$

で与えられる。ただし状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\theta} \quad \boldsymbol{S} \quad \boldsymbol{\dot{\theta}} \quad \boldsymbol{\dot{S}}]^{T}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(9)$$

なお、倒立振子系での状態推定  $\hat{x} = \begin{bmatrix} \theta & S & \dot{\theta} & \dot{S} \end{bmatrix}^T$  には付録 2 で説明の最小次元観測器を用いる。

## 2.3 NN 制御器

制御器として, LQ, ニューラル・ネットワーク(N.N.)制 御<sup>3)</sup>, ループ整形  $H^{\infty}$ 制御<sup>4)</sup>,  $LQ \ge N.N$  および  $H^{\infty} \ge$ N.N ととの併用制御系を用いる。

図3は、4変量に対する圧縮係数*Nn*および出力係数*Kn* をもつ3層*N.N*.制御器構造を示す。*N.N.*の重み*v<sub>ji</sub>、w<sub>kj</sub>* の学習に最急降下法を用いるため誤差*e<sub>i</sub>*を最小化する評価 関数*J*を式(10)と定義する。

—16—



**Fig.3** Structure of a 3-layer-neural network based on the learning mechanism having  $J = e^{T}e/2$ 

$$J = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_m - \hat{\boldsymbol{x}}_i \tag{11}$$

なお、重みの更新 ( $\Delta v_{ji}, \Delta w_{kj}$ )は、逆伝播学習法により

$$v_{kj}(t+\Delta t) = v_{kj}(t) + \Delta v_{kj}, \quad \Delta v_{kj} = -\alpha \frac{\Delta J}{\Delta v_{kj}} = \alpha \delta_k H_j \quad (12)$$

$$w_{ji}(t + \Delta t) = w_{ji}(t) + \Delta w_{ji}, \quad \Delta w_{ji} = -\alpha \frac{\Delta J}{\Delta w_{ji}} = \alpha \sigma_j I_i \quad (13)$$

Jを最小化するように行う。ここで。教示信号を T<sub>k</sub>とすると

$$\delta_{k} = \mu (T_{k} - O_{k})((1 - O_{k}))$$

$$\sigma_{j} = \mu \sum_{k} \delta_{k} \nu_{kj} H_{j}(1 - H_{j})$$

$$H_{j} = f(U_{j}) = 1/\{1 + \exp(-2U_{j}/\alpha)\}$$

$$U_{j} = \sum_{i} w_{ji} I_{i} + \theta_{j}$$
(14)

の関係がある。 $H_i$  はシグモイド関数を示す。N.N. 制御力 $u_N$ は,

$$u_{N} = V^{T} W I$$

$$V = [v_{kj}] \in R^{M \times 1}, \quad W = [w_{ji}] \in R^{M \times N}, \quad I \in R^{N \times 1}$$
(15)

#### 2.4 ループ整形に基づくH<sup>∞</sup>制御器

ループ整形法<sup>4,5)</sup>は,図4の破線のように,前・後補償器 W<sub>1</sub>,W<sub>2</sub>を実プラントPの前後につなぎ,開ループの周波



Fig.4 Loop-shaping design method

数特性を整形し、これを新たな整形プラント  $\hat{P} = W_2 P W_1$ とする。伝達関数行列の記述にはドイル表式を用いる。

$$\boldsymbol{G}(s) = \left[ \frac{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D}} \right] = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$
(16)

前置補償器 W<sub>1</sub>には式(14)で示す1次フィルター関数を, W<sub>2</sub>には台車系の応答性改善を目的として式(15)を用いる。 q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>は重み係数である。

$$\boldsymbol{W}_{1} = \frac{\omega^{2}}{s + \omega^{2}} = \left[\frac{-\omega^{2}}{\omega^{2}} \frac{1}{0}\right]$$
(17)

$$W_2 = diag[q_1 \quad q_2] \tag{18}$$

整形プラント $\hat{P}$ に対して $H^{\infty}$ ノルム条件

$$\begin{bmatrix} I \\ \hat{K}_{\infty} \end{bmatrix} (I - \hat{P}\hat{K}_{\infty})^{-1} \begin{bmatrix} I & \hat{P} \end{bmatrix} \Big|_{\infty} < \gamma$$
(19)

を満たす制御器 **K**<sub>∞</sub>を求める。式(16)の中心解は次の手順で 求められる。

(I) リカッチ方程式の正定解*X*, *Z*を計算する。

$$\hat{A}^{T}X + X\hat{A} - X\hat{B}S^{-1}\hat{B}^{T}X + \hat{C}^{T}R^{-1}\hat{C} = 0$$
 (20)

$$\hat{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}\hat{A} - \boldsymbol{Z}\hat{C}^{T}\boldsymbol{R}^{-1}\hat{C}\boldsymbol{Z} + \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{S}^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}^{-1} = \boldsymbol{0}$$
<sup>(21)</sup>

(II)  $H^{\infty}$ ノルムの最小値  $\gamma_{\min}$  を求める。

$$\gamma_{\min} = \sqrt{1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Z})} \tag{22}$$

(III)  $\gamma > \gamma_{\min}$ を満足する  $\gamma = 1.05 \gamma_{\min}$ に対して  $\hat{K}_{\infty}$  は

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{K}}_{\infty}(s)\hat{\boldsymbol{y}} \tag{23}$$

ただし

$$\hat{K}_{\infty}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & | -\gamma^2 W^{-T} Z \hat{C}^T \\ -\tilde{B}^T X & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \tilde{C}_k & 0 \end{bmatrix}$$
(24)

$$\begin{split} \hat{A} &= \hat{A} - \hat{B} S^{-1} \hat{B}^{T} X \\ &+ \gamma^{2} \{ I + (XZ - \gamma^{2} I) \}^{-T} Z \hat{C}^{T} \hat{C} \end{split} \tag{25}$$

$$W = I + (XZ - \gamma^2 I) \tag{26}$$

ここで  $\hat{K}_{\infty}$  を P に対する制御器  $K_{\infty}$  (図 4 の二重線)となるようにループ変換すると最終的な制御器  $K_{\infty}$  は、

$$\boldsymbol{K}_{\infty} = \boldsymbol{W}_{1} \hat{\boldsymbol{K}}_{\infty} \boldsymbol{W}_{2} = \left[ \frac{\boldsymbol{A}_{k} \mid \boldsymbol{B}_{k}}{\boldsymbol{C}_{k} \mid \boldsymbol{D}_{k}} \right]$$
(27)

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_{\infty}(s)\boldsymbol{y} \tag{28}$$

で与えられる。

図5に N.N. 補償器を併用した制御系構成図を示す。プラントへの制御力は、モデルベース制御器の制御力 $u_m$ と N.N. 制御器の制御力 $u_N$ との併用とする。ここでモデル基制御器は、LQおよび $H^{\infty}$ 制御器を示す。



Fig.5 Model-based feedback control system connected with a N.N. compensator

## 3. 結果および考察

#### 3.1 片持梁振動系での NN 制振制御効果

図6は、図1に示す片持梁振動系のシミュレーション結 果を示す。同図(a)は自由振動を,(b)は*LQ* 制御条件:

重み  $Q = diag[400 \ 400], R = 1,$ 最適ゲイン  $K_{opt} = [3.50267 \times 10^1 \ 3.43233 \times 10^1]$  (29)

での制振制御応答を、同図(c)-(e)はN.N.制御条件:

入力圧縮係数  $NN_1 = 0.00051, NN_2 = 0.00051$ 収束係数  $\alpha = 0.20, 出力係数 K_n = 1.0$  (30)

での制振制御応答を、(f)は $H^{\infty}$ 制御器による制振制御応答 をそれぞれ示す。NN制御器単独に用いた制御系は良好な 制振性を有している。



Fig.6 Simulated vibration waveforms under the conditions of free oscillation (a), a LQ controller (b), a N.N. one ((c)-(d)), and an  $H^{\infty}$  one (f)

図7に,実験に使用した(制振対象としての)片持梁振動 装置を示す。図8は,実機での制御器による自由振動から の能動的制振制御応答を,図9にN.N.制御器による自由振 動からの能動的制振制御応答を,図10にLQとN.N制御器 併用系での自由振動からの制振制御結果をそれぞれ示す。



Fig.7 Cantilevered type vibration system



(b) Variation parameter system  $m + \Delta m = 3.4 [kg]$ 



Fig.11 Amplitude-dependent active damping capacity (SDC) via a LQ controller



Fig.12 Amplitude-dependent active damping capacity (SDC) via LQ+N.N. controller

各制御器でのロバスト制振性の効能の差異を整定時間の 面から検証するため,

(a): m = 2.9[kg](公称荷重下で整定時間  $T_N$ )

図(b):  $m + \Delta m = 3.4[kg]$ (変動荷重下で整定時間  $T_v$ ) の条件差での制振制御結果を示す。図9(LQ 制御系)では, 整定時間が  $T_N \approx 1[s]$ から,パラメータ変動にり, $T_v \approx 1.$ 9[s]へと約2倍に制御性能が劣化している。一方,図9 (N.N.制御系)では, $T_v \approx 1.5[s]$ へと性能劣化が抑制されて いることが分かる。さらに図10に示す LQ と N.N 制御器 併用系では,パラメータ変動下でも整定時間は  $T_v \approx 1.2[s]$ へと格段に改善されており,N.N.補償器によるモデル基 制御系との併用の効果が分かる。このことを,次式(30)で定義 される比哀能<sup>6)</sup> (Specific damping capacity, SDC)

$$SDC = (1/2\pi)(A_n^2 - A_{n+1}^2)/A_n^2 \tag{31}$$

用いてより定量的に検討してみる。ここで振幅 *A<sub>n</sub>*, *A<sub>n+1</sub>*は, 相隣り合う減衰振動振幅を示す。

図11は、代表的モデルベース制御器であるLQ制御による SDCの(無次元化)振動振幅特性を、図12に LQとN.N制御器併用系での SDCの(無次元化)振幅依存特性を示す。LQ制御器単一系に比べて低振幅域での制振性の低下が抑制されている。図11と図12の比較から、振動振幅の大きい領域では比減衰能はの差異は見られず、低振幅になるにつれてピーク性を有する SDC $\approx$ 0.14への漸増関数的傾向にある。((b)特性の比較から)パラメータ変動の場合、点線の楕円領域で示すように特に低振幅域において



Fig.13 Vibration-suppressing effects against an impulsively applied disturbance

NN 並列補償器制御器系の方が LQ 単独制御系に比べて 比減衰能 SDC の低下が少く, N.N. 並列補償によるロバス ト制振効果の向上が明確に見られる。

図 13 は, *LQ*(同図(a), (b)), *N.N.*(同図(c), (d)) *H*<sup>∞</sup>(同 図(e), (f))制御器系での,加振外乱に対する制振制御の整定 状況を示す。それぞれに効果的制御性が見られる。

#### 3.2 クレーン系での NN 制御効果

クレーン系に関しては, LQ 制御のみの場合と, N.N. 並 列補償器のある場合についてロバスト制御性の差異を検討 する。パラメータ変動として, ①振子長をモデリング0.6 [m]から1.0[m]に変化させたり, ②定値外乱として台車変 位量 0.5[m]を与えて制御性の変化を調べた。

図14は、標準パラメータ系(振子長の変化がない場合)に







Fig.15 Simultaneous control effects in a real crane system (having a nominal parameter) *via* a *LQ* controller with *N.N.* compensator

対する LQ 制御の場合の振子角制振と台車位置決めとの 同時制御の実機実験結果を示す。同図(a)は振子角の応答 を,(b)は台車の変位応答を,(c)は制御力を示す。台車に対 して制御開始から ts=10[s]後に0.5[m]の定値外乱を与えたが,台車が整定後の13~20[s]においても振子振幅角には残留振動が見られる。一方,図15は、LQとNNの併用制御系での同時制御の実機実験結果を示す。この場合,点線楕円領域で示す通り残留振動はあまり見られず,NN補償器併用による制御性の向上が見られる。図16に示すように,パラメータ変動(振子長を変化させた)系でも,台車への定値外乱後の振子角残留振動に対して,NN補償器併用により,制御性の改善が見られる。なおクレーン系でのLQ 制御系設計条件は

$Q_{opt} = diag[100,$	10,	5,	5],	r = 1	(32)
-----------------------	-----	----	-----	-------	------

 $K_{opt} = [-11.70, 3.16, -0.57, 2.54]$  (33)

また N.N. 入力圧縮係数は

$$\begin{bmatrix} NN[1]=0.0005, NN[2]=0.0001\\ NN[3]=0.0001, NN[4]=0.0001 \end{bmatrix}$$
(34)



Fig.16 Simultaneous control effects in a real crane system (having variation parameters) *via* a *LQ* controller with *N.N.* compensator

#### 3.3 倒立振子系での NN 制御効果

倒立振子系に関しては, H<sup>∞</sup>制御器系での N.N. 補償効 果を検討する。ループ整形理論に基づく H<sup>∞</sup>制御器の設計 仕様は付録1に示す。なお N.N. 入力圧縮係数は

NN(1) = 0.0008,	NN(2) = 0.0008	(25)
NN(3) = 0.0001,	NN(4) = 0.0001	(50)

を採用した。

図17および図18は, H<sup>®</sup>制御器系および N.N. 補償器 系でのシミュレーション制御応答を示す。台車の定値外乱 ts後の振子側の整定状況を対比すると,図18の NN 補償 器併用系の方が良好であることが分かる。効果に示すよう に全域に亘ってリプル成分が見られるが,NN 補償器との 併用系では図17に示すようにそれらが除去される効果が あることが分かる。

図19および図20は、倒立振子実機でのN.N.補償器併 用によるロバスト制御性改善の検証結果を示す。実機での ロバスト性検証因として、①錘(57[g])を振子先端に付加 させてパラメータ変動をさせた場合、②台車に0.25[m]の 定値外乱与えた場合、さらに③約2°の台車レールを傾けた 傾斜外乱を与えて場合についてN.N.併用の効用を検討し た。図19,図20において、tsは台車の定値外乱が与えられ、







Fig.18 Simulation control in an inverted pendulum system *via* a *LQ* controller with a *N.N.* compensator



Fig.19 Simultaneous control effects in a real inverted pendulum system via only an  $H^{\infty}$  controller



Fig.20 Simultaneous control effects in a real inverted pendulum system via an  $H^{\infty}$  controller with a NN compensator



*t*<sup>*R*</sup> は台車のガイドレールに約2°の傾斜外乱が与えられた 時間をそれぞれ示す。いずれの場合も *NN* 補償器との併用 によりリプル成分が除去され,定常偏差が改善されること が分かる。この *N.N.* による適応ロバスト性の改善効果は, 則次ら<sup>7)</sup>による *PID* 制御器との併用効果による位置決め 制度の向上の指摘とも良く対応するものと考えられる。

リアプノフ安定条件的説明<sup>8)</sup>も重要であるが,別途検討 する。ここでは図 21 に示す制御偏差  $e=x_m-x$  空間で定性 的考察をする。モデル基制御器による標準パラメータ・プ ラントの制御軌道(曲線①: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ )に対し,パラ メータ変動系に対する制御軌道(②: $A \rightarrow B \rightarrow C' \rightarrow 0$ )とすると、(系の安定性はモデル基制御系で保証されるが)N.N.補償器の方は変動偏差  $e_p(t)$ に関して  $e_p(t) \rightarrow e(t) \rightarrow 0 \sim$ と適応収束させる役割と考えられる。

### 4.結 言

片持梁振動系,クレーン系,倒立振子系のモ制御系に ニューラルネットワーク(N.N.)補償器を併用して,N.N. による制振性やロバスト制御性への効果について検討し た。

梁振動の LQ 制御器系は, N.N. 補償器との併用制御系 の方が制振の難しい低振動振幅域で N.N. 補償によるロバ スト制振制御性が認められた。

クレーン系や倒立振子の多自由度・同時制御系では, N.N. 補償器併用による台車位置決めの定常偏差や振子角 残留振動面においてロバストな同時制御効果が認められ た。

#### 参考文献

- [1] 例えば成川輝真,高橋正樹,吉田和夫:日本機械学会 MoVic 2003 講演論文集,(2003)513/518。
- [2] 川辺尚志,築山直樹:ニューラルネットワーク理論 を利用した振子系の運動制御,第12回知能メカトロ ワークショップ(2007,8/2728,広島)予稿集,(2007) 121/126。
- [3] 杉坂 政典:入門システム理論と制御,日刊工業新 間社(1997)。
- [4] 川谷亮治,村田剛他:ループ整形設計法による低次 元観測器の設計,計測自動制御学会論文集,34-1, (1998)20/26。
- [5] 神本和昭,川辺尚志:H<sup>∞</sup>制御理論を使った剛性リンクに載った弾性リンクからなる2重倒立振子系のスライディング・モード制御,日本機械学会論文集, 68-668,C(2002)1133/1139。
- [6] H.Kawabe N.Tsukiyama, & K.Yoshida : Active Vib-ration damping based on neural network theory, Proc. ICIFMS-14(Kyoto), (2006)547/550.
- [7] 則次俊郎,谷本圭司,安原亮輔,馬島聡志:ニュー ラルネットワークを用いた大型液晶基板搬送ロボット の学習制御,日本機械学会論文集,67-664,C(2001) 3883/3888。
- [8] 例えば,徐 炳鴻,辻 敏夫,金子 真:ニューラ ルネットを利用したモデル化誤差を含むプラントの同 定と制御,計測自動制御学会論文集,32-4,(1996)510/ 516。

録

- 1. 倒立振子系でのループ整形理論に基づくH<sup>∞</sup>制御器設 計仕様
- 1.1 ドイル表現でのプラントパラメータ

$$P = \left[\frac{A \mid B}{C \mid D}\right] =$$

0	0	1.0000	0	0
0	0	0	1.0000	0
0	-0.0370	-4.3400	0.0010	4.1600
0	21.6000	9.5400	-0.5700	-9.1400
1.0000	0	0	0	0
0	1.0000	0	0	0

に対する前置および後置補償器 W<sub>1</sub>(s), W<sub>2</sub>(s)の設定

$$\boldsymbol{W}_{1}(s) = \frac{30}{(s+30)} = \left[\frac{a_{w}}{c_{w}} \frac{b_{w}}{d_{w}}\right] = \left[\frac{-30}{30} \frac{1}{10}\right] \quad (A\ 2)$$

$$\boldsymbol{W}_{2}(s) = diag[20 \quad 10] \tag{A 3}$$

1.2 整形プラント
$$\hat{P} = W_2 P W_1 = \left[\frac{aa}{cc} \frac{bb}{dd}\right]$$
は

$$\boldsymbol{aa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & -0.0370 & -4.3400 & 0.0010 & 124.8000 \\ 0 & 21.6000 & 9.5400 & -0.5700 & -274.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 \end{bmatrix}$$
(A 4)

$$bb = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$
 (A 5)

$$\boldsymbol{cc} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{dd} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(A 6)

1.3 整形プラント P(s) に対するH<sub>∞</sub>制御器解

$$\hat{K}_{\infty}(s) = \left[\frac{A_k \mid B_k}{\hat{C}_k \mid \hat{D}_k}\right] \tag{A 7}$$

は以下の要素で形成される。

$$\hat{\boldsymbol{A}}_{k} = \begin{bmatrix} -9.2188 & -2.9636 & 1.0000 & 0 & 0\\ -11.8543 & -97.9240 & 0 & 1.0000 & 0\\ -28.3673 & 60.4488 & -4.3400 & 0.0010 & 124.8000\\ -40.8306 & -521.8406 & 9.5400 & -0.5700 & -274.2000\\ 20.1302 & 52.9624 & 15.2208 & 9.6328 & -48.821 \end{bmatrix}$$

$$(A \ 8)$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{k} = \begin{bmatrix} -0.4609 & -0.2964\\ -0.5927 & -9.7924\\ -1.4184 & 6.0486\\ -2.0415 & -54.3441\\ 0.0065 & 0.4311 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{k} = \begin{bmatrix} -20.0000 & -48.6514 & -15.2208 & -9.6328 & 18.8215 \end{bmatrix}$$

$$(A \ 10)$$

$$\hat{\boldsymbol{D}}_{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{\infty}(s) = \boldsymbol{W}_{1} \hat{\boldsymbol{K}}_{\infty} \boldsymbol{W}_{2} = \boldsymbol{C}_{k} (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{k})^{-1} \boldsymbol{B}_{k} + \boldsymbol{D}_{k}$$
(A 12)

は,結局以下の要素で与えられる。

$$A_k =$$

$$\boldsymbol{B}_{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9.2188 & -2.9636 \\ -11.8543 & -97.9240 \\ -28.3673 & 60.4858 \\ -40.8306 & -543.4406 \\ 0.1302 & 4.3110 \end{bmatrix}$$
(A 14)

$$C_{k} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(A 15)  
$$D_{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(A 16)

この最終的H<sup>∞</sup>制御器K<sub>∞</sub>を用いた閉ループ系の固有値は

$$eig(\mathbf{A}_{c}) = \begin{bmatrix} -92.8989 \\ -30.2843 \\ -8.2567 + 7.4309i \\ -8.2567 - 7.4309i \\ -7.6134 + 5.4997i \\ -7.6134 - 5.4997i \\ -3.4669 + 1.5343i \\ -3.4669 + 1.5343i \\ -4.6763 \\ -29.2508 \end{bmatrix}$$
(A 17)

なお,開ループ系Aの固有値は

$$eig(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.3675 \\ -5.0055 \\ -4.2719 \end{pmatrix}$$
(A 18)

これら閉ループH<sup>∞</sup>制御器系での極配置状況を図A1に 示す。



Fig.A1 Poles of the  $H^{\infty}$  control system based on the loop shaping design procedure Circle  $\circ$  : Poles of Closed loop system( $A_c$ ) Square  $\Box$ : Poles of Open loop system(A)

# 2. 倒立振子系でのLQ制御系に用いた最小次元観測器の 設計仕様

推定状態量x

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}_p + L \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$
(A 19)

$$\tilde{\dot{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\rho}} + \tilde{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{y} + \tilde{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{u} \tag{A 20}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{S} \end{bmatrix} \tag{A 21}$$

$$\tilde{A} = A_{22} - LA_{12} = \begin{bmatrix} -22.47 & -3.752 \\ 5.788 & -23.62 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{B} = \tilde{A}L + (A_{21} - LA_{11}) = \begin{bmatrix} -431.3 & -170.86 \\ 16.27 & -501.1 \end{bmatrix}$$
(A 22)
$$\tilde{J} = B_2 - LB_1 = \begin{bmatrix} 4.161 \\ -9.144 \end{bmatrix}$$

ここに, 観測器ゲインLは

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 18.13 & 3.753 \\ 3.753 & 23.05 \end{bmatrix}$$
(A 23)

また

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(A 26)

の関係がある。最小次元観測器を用いた閉ループ*LQ*制御 器系での極配置状況を図A2に示す。





なお、制御系最適ゲイン $K_{opt}$ は、Q = diag[100 100 5 5]の 重みに対して

$$K_{opt} = [-10.00 - 36.57 - 9.755 - 7.476]$$
 (A 27)  
である。この場合、評価関数 $J(u)$ は

$$J(u) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^2) dt \qquad (A 28)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{S} & \boldsymbol{\dot{\theta}} & \boldsymbol{\dot{S}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{A 30}$$