広島工業大学紀要教育編
第8巻（2009）pp.7-11
論　　　　文

工学部基礎教育における解析学教育の目的と内容について

小山　哲也*

（平成20年10月27日受理）

On the Aims of the Education of Mathematical Analysis in the Faculty of Engineering

Tetsuya KOYAMA

（Received Oct. 27, 2008）

Abstract

The aims of education of mathematical analysis are discussed as a fundamental education for engineers. In this viewpoint, the contents of the subject are examined.

Key words: education of mathematical analysis, education for engineers.

1　序

近年大学入学者の学力低下，理系離れが言われている。また，本学のような地方大学にあっては学力と学習意欲の格差の増大も大きな問題である。この状況の中で，工学教育の目指す目標，また目標実現の方策は何かということが早晩改めて問われる事になると考える。単に伝統的な学科目の内容を検討することにとどまらず，「ものを消費する生き方からものを作り出す生き方への切り替え」「技術者に求められる責任感，勤勉さの養成」といった大きな方針から考えなおさなくてはならないのであろうが，本稿においては問題を限定して「工学部の基礎教育としての解析学教育が目標とすべきもの，そのための教育方法」について，現在のところの筆者の考えをまとめておこうと思う。筆者は長く電気系の学科にいたので考えが電気に偏るかもしれないが，読者の批判を仰ぎたい。

2　本学工学部基礎教育に於ける解析学教育の目標

表題の目標として，筆者はまず次の点を挙げるべきであると考える。

1. 力学および電磁気学や，構造力学などの応用力学のような，工学諸分野の理論的な基礎となる科目をきちんと学習するための準備をする。
2. 物事を原理的に理解しようと努力し，複雑な計算をきちんと遂行する態度，力量を涵養する。

工学部各学科は1，2年次に各分野の理論的基礎に当たる上述の科目を置いているが，これらの学科担当者と数学，物理担当者の連携がうまくなされているとは言い難く，学習者はかなりの困難を抱えているように見受けられる。工学部の基礎教育としての解析学教育に在ってはまずこれらの科目の学習を支援することを目標とすべきである。数学固有の価値観，問題意識があるとする考え方もあるが，解析学はその成立時，他の自然科学と渾然一体であったのであり，そのころの素朴な問題意識から出発するのが初学者のためである。数学教育学会会長の藤田宏教授はその講演[1]の中で，「学校における数学教育は学習者が必要とする数学の知識と応用力を育てるための営み」であり，したがって「実学である」としておられる。

具体的に述べよう。上述の諸応用力学の基礎には古典力学があり，古典力学の中心概念である運動方程式はMaxwll方程式，Navier-Stokes方程式等の基礎的な方程式を導き出す根拠となっている。このような事情を理解させるためには微分法と微分方程式の理解と習熟が不可欠である。また，力学や交流回路理論等に現れる具体的な微分

*　広島工業大学工学部電気デジタルシステム工学科

方程式を解くためには初等関数の知識と微積分の計算能力が必要である。また，点や剛体の運動を表現するためには座標と曲線のパラメータ表示が必要であるし，場の解析のためには曲面，領域等の対象を表現し，その上で微積分をすることが必要となる。

微積分の知識は工学部にあってはまずこのような意味で力学，工学の基礎として大切なのであるから，学生指導に当たってはこれらの科目との関連を強調するべきであると考える。またこのことは学生の学習意欲を高めるのにも寄与すると信じる。

また工学を本格的に学ぼうとすれば，物事を分かろうと努力する姿勢，きちんと計算しようとする姿勢を身につけねばならない。これは学科の知識修得以前に，まっとうな社会人，技術者として必要な資質であろう。そのためには，一方通行になりがちな講義のみでなく課題を与えて自発的に，且つある程度の量を解かせることが必要である。但しこのための題材は何でもよいわけではない。学科，コースに応じて教える意味のあるものを厳選すべきである。またその際，常に目的意識，問題意識を強調すべきである。上に挙げた題材はそのためのよい材料になりうると思う。

3　内容と方法

前節の目標を達成するためにふさわしい教材とその教授方法について考える。

まず内容を精選するべきである。高等学校で学ぶべき知識が十分身に付いていない学生が増える中，題材を少数に制限することはやむを得ないことである。この際「初等的な解析の教育において守るべき水準とは何か」を考えておくのは今後の教育計画を戦略的に立てていくために必須であろう。[1]で藤田教授は「とくに充実してほしいと願い，かつ，その効果を期待している」数学リテラシー教育として

- 指数関数リテラシー
- 微分（微小量）解析リテラシーと運動学リテラシー
- 統計リテラシー

を挙げておられる。本稿もこのうち前 2 者に従うものである。

次に，概念の勘どころを理解させるために説明を工夫する。論理的正確さを追及するのは時間的にも学生の能力の点から見ても無理である。形式的な煩雑さを避けつつポイントを突くことを目指すべきである。典型例の例示で済ませる場合があってもよい。図を用いることは，陥穽もあるが一般に有益であろう。

演習問題は典型的な例を用いるべきである。計算のための計算は意味がない。また，必要な知識の定着の劣る（勉強の遅い）学生のために詳しい解説を付けた方がよい。できれば応用のある問題が望ましい。

以下，具体的な内容とその狙いを述べる。

3.1. 等式と不等式の性質

＝，≦の性質を整理し，方程式，不等式が確実に解けるようにする。式の変形，特に≦の処理が覚束ない学生が存在するので対策が必要である。

3.2. 実数と関数の連続性

実数を用いてすべての物の長さが測れることを述べる。（実数の連続性。）言い換えると「どんな（無限）小数にもそれを表す実数がある」ので，測定を極限にまで精密にしていくことによりどんな長さも実数で表せるということである。このことが微積分の実世界での有効性を保証するのであるから一言述べるに値すると考える。また，物事の変化は多くの場合連続的なものであり，我々が対象とする関数も多くは連続なものである。中間値定理と最大値定理は理論上しばしば本質的な役割を果たすので重要である。理論の建設に力を割くことはできないが「大事だ」と言うことは一度は述べて印象に残しておくに値すると考える。

3.3. 円関数

等比数列a^nは，常に一定倍率で変化する変化の様子を表現したものである。この「定倍率変化」という法則を

変化率$\dfrac{f(t+\delta t)}{f(t)}$は時刻$t$によらず経過時間$\delta t$のみできまる　(1)

のように一般化して等比数列を補間したものが有理数べきであり実数べきである。このような変化は生物個体群の増殖や放射性物質の崩壊など自然界において頻繁に現れるので，それを表現する関数として指数関数は重要なのである。また，(1)は指数法則

$$f(t)f(s)=f(t+s)$$

と同等であり，さらに極限操作により重要な関係式

$$f'(t)=const.\,f(t)$$

が導かれる。特に底をeに取るとこの定数が 1 になる。このことから底がeの指数関数は微分方程式の解法で重要となる。底がe以外の場合は重要視する必要はない。

三角関数は，特に電気系にあっては三角形を解くためというより回転や振動を表す関数として重要である。従って導関数の性質が大事なので初めから弧度法で定義するべきである。加法定理から派生する諸公式はそれほど重視する

必要はないと考える。

三角関数と指数関数は複素数を仲立ちにしていわゆるオイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

により結びついている。このことを利用して複素指数関数を

$$e^{z} = e^{\mathrm{Re}\,z}(\cos\mathbf{Im}\,z + i\sin\mathbf{Im}\,z)$$

で定めると，指数法則(3)の他に

$$\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$$

が成り立つので微積分の計算が大変見通しよくなる。このことは交流理論で盛んに利用されるので，電気系においては早い時期に習熟させるべきである。また，2年次の微分方程式の理論でも大切である。

3.4. 極限と微分法

極限の概念の理解は素朴なもので十分と思う。極限概念を使用する目的は「連続関数の定義」「±∞での挙動の解析」「微分係数，導関数の定義」であろうが，最後のものが最重要である。

微分係数は運動する物体の瞬間の速度を表現するものとして考え出されたものであり，最重要の応用もここにあるのだからこのことは一言触れるべきであると考える。数学の授業以外で使えるようになるし，目的意識を述べるのはモチベーションを高めると考えるからである。

微分法の諸公式は，演習の中で理解させるのが適当である。特に，合成関数の微分法が最も重要であるが，これは適当な例題を繰り返し計算させるのがよいと思う。逆関数の微分法，パラメータ表示された関数の微分法は結局合成関数の微分法の系であり，軽く説明をしておいて，実際に使う場面で本格的な説明をすればよいであろう。

3.5. 対数関数

対数関数は指数関数的変化を線型変化に，等比数列を等差数列に直す関数であるから，応用上重要である。対数目盛りについても触れたい。対数微分は限界伸び率である。伸び率一定の関数が指数関数に他ならない。適当な例題を作りたい。

3.6. テイラーの定理

テイラーの定理は関数の多項式近似の理論，つまり一般の関数$f(x)$に対して

$$f(a) = P(a),\quad f'(a) = P'(a),\quad f''(a) = P''(a),\quad \cdots f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a)$$

を満たす多項式P(x)を作ると

$$x \fallingdotseq a \Rightarrow f(x) \fallingdotseq P(x)$$

であることととらえるのが適当であると考える。これが本来の目的意識であろうし，学生にとっても分かりやすく，かつ応用に結びつきやすい。説明は$a = 0$の場合（マクローリンの定理）で十分であろう。この近似がうまく行っていることを説得する最良の方法はグラフを書いてみせることである。できればグラフ描画ソフトを使用した演習を考えたい。

ロピタルの定理は強力ではあるがやや煩瑣なラグランジュの定理を準備せねばならず，割愛するのもよいと思う。重要と思われるのは

$$\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} \to 0,\ \frac{\log x}{x^{\alpha}} \to 0\,(x \to \infty)$$

だけであり，これらはテイラーの定理から導くことも可能である。収束べき級数の理論は1年次でキチンとやることは無理であり，必要ならば2年次の微分方程式でやるべきである。いくつかのテイラー級数が収束することを注意するにとどめるべきである。

3.7. 関数の増減の評価と極値問題

関数の値の挙動の評価，極値の特定は微分法の大きな任務である。また，興味ある応用問題もあり重視したい教材である。

原理は関数$f(x)$がある区間Iで

$$f'(x) \geqq 0 \Leftrightarrow \text{単調増加}$$

ということに尽きる。このことは受け入れるのにさほどの困難はないと考える。しかし，実際計算にあっては微分計算の他に導関数の零点の特定，符号の決定を行わねばならず,計算に習熟していない学生には若干の困難があるので,注意が必要である。また，最終的にグラフを書いてみせることは教育的効果が大きいと思う。

3.8. 積分法

定積分と不定積分と，どちらから入るかという問題がある。理論的には定積分が先であろうが，今回は触れないことにする。

目標は「積分概念の理解」と「置換積分法，部分積分法，部分分数分解を用いたやや複雑な積分計算の運用」である。

積分概念は「速度の定積分が道のりになる」ことから微分法の逆演算であることを説明するのが一番素朴で分かりやすいと思う。区分求積法で図形の面積，体積を求めるこ

とも本質を突いており有効であろう。ただし，区分求積法の議論を経るべきであり，定積分を天下りに微分法の逆として定めるのは人工的である。

置換積分法，部分積分法と部分分数分解は微分方程式の求積において本質的に大切なものであるから，ある程度習熟させたい。

初等関数の原始関数は網羅的にとりあげて説明する必要はない。

$$x^{\alpha},\ e^{x},\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \frac{1}{x^2+a^2},\ \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

程度で十分である。もし公式集として使用したいのであれば，巻末などにまとめて掲載した方が便利である。

求積可能な初等関数の積分は，限界を追求する必要はない。有理関数の積分が求積可能であることをどこかで述べれば十分であろう。ただ，極座標表示との関連で$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$の有理関数の積分が必要になるので，計算例を挙げるべきである。

Laplace 変換，無限遠点を基準とした電位の計算などで現れるから広義積分を述べる事は必要である。

3.9. 多変数関数の微分法

偏微分法は本質的に１変数関数の微分と同じことであるから徒らに難しく考えさせてはいけない。大事なのは複数の変数を同じ資格で扱う全微分法，及びその後に来る変数変換の考え方である。必然的に幾何的な直感を動員しなくてはいけなくなる。全微分は一次関数による近似であり，それによってグラフの接平面が得られることを理解させたい。さらに電気系にあっては，方向微分および変数変換，特に極座標への変数変換に伴う導関数の置き換えを理解させたい。

２変数の Taylor の定理は２階まででで十分である。多変数関数の極値問題は，２階の Taylor 近似を利用して必要十分条件を与えることは出来るが，定理の証明には深入りせずその内容を多項式関数を用いて直感的に理解させれば十分であると思う。

陰関数の微分法は「関数が明示的でない場合にも微分計算を実行できる」ことであり，その結果は微分方程式をあたえる。習熟すれば微分計算の考え方の自由度を大幅に上げる事になり，陰関数の極値問題への応用など大きな利益がある。適当な例題でこのことを説得したい。

3.10. 平面，空間領域の表示

平面，空間の領域を不等式を用いて表示することは数学に限らず各分野で基本的に重要であり，その習熟を求められている事柄であると考える。講義２回程度を費やす価値があると思う。

3.11. 重積分法

２重積分の概念が定積分の概念の２次元版であることを理解し，正しく計算できるようにする。また，極座標変換を確実に実行できるようにする。概念を理解させるために，積分領域は長方形，三角形，円，半円くらいで十分と考える。

重積分の大きな目的は空間の領域の体積を求めること，さらに密度を積分することによって質量を求めることであろう。これは多くの分野で理論構成のためにも実際計算のためにも重要なことである。従って概念の理解にとどまらず具体的な例の計算も取り上げ，計算力をつけるべきである。

立体図形Dの体積の計算の基本的な考え方は

1. $\lim\sum$(z軸方向の直線で貫いたときの共通部分の長さ)$dxdy$
2. $\lim\sum$(x, y方向の平面で切ったときの断面積)dz

の２つである。dx，dy，dzの意味がおろそかにならないように注意したい。また，次元の感覚も身に付けて欲しい。

構造力学で重要な重心，モーメントの積分も触れたい。

3.12. ベクトル関数

ベクトルの演算を理解させる。特にベクトルの外積は重要なので適当な例題を計算する。ベクトル関数の微積分は深入りしない。内積，外積の微分法も軽く触れるにとどめる。

3.13. 曲線と線積分

曲線のパラメータ表示はそれ自体幾何学的に興味のあるものであるが，点の運動を解析するための道具でもあり力学的にも重要である。速度ベクトルの概念を確実に理解させたい。適当な例題が必要である。線積分による仕事の計算も述べたい。

3.14. 曲面と面積分

曲面上のスカラー場，ベクトル場の面積分は電磁気学，流体力学などで重要である。これを球面とクーロン場を例にとって説明する。

3.15. 場の解析と積分定理

スカラー場の勾配とベクトル場の発散は電磁気学の基本的な概念であるので，ぜひ時間内に触れておきたい。演習は典型的な例のみで十分である。Gauss の積分定理は時間的に無理であろうが読めば分かるように書いておきたい。

ベクトル場の回転とStokesの定理は時間的に苦しいところであるが，書いておいたほうがよいであろう。

4　結語

以上，工学部基礎教育としての解析学教育の望ましいあり方を再検討し，現行の教育内容に即して私見を述べた。今後の授業計画，教材作成等に生かしていきたいと考えている。

参考文献

[1] 藤田宏　数学教育の致命的な歪を直視しよう　とくに中等教育と（大学での）教養・実学教育について　数学教育学会2007年度年会総合講演