広島工業大学紀要教育編
第 15 巻（2016）25–33
論　　　　　　文

大学基礎数学教育における反転授業の試み

――解析学――

廣瀬　英雄*

（平成27年 9 月24日受付）

A Case of Flipped Classroom for the Undergraduate Mathematics Education

—— Analysis ——

Hideo HIROSE

(Received Sep. 24, 2015)

Abstract

To undergraduate mathematics classes, flipped classrooms were performed. The theme is an application for the Taylor expansion to find the approximate probabilities for a normal distribution. There is a critical issue in applying the Taylor expansion in some cases. For example, even though the exponential function can be expressed by an infinite polynomial series for all real numbers, to find the approximate numbers using a Taylor series with finite terms, we have to know in advance the relation between the degree of the polynomial and the accuracy of approximation. An intriguing problem to find the approximate probabilities for a normal distribution provides many educational lessons for beginners and practitioners of undergraduate mathematical courses.

The flipped classrooms were successful. Students felt stimulating and had fun in classrooms. To avoid boring mathematics classes using stereotype exercises, we have found that the flipped classrooms are useful in undergraduate mathematics education. Above all, the students did understand the significance of the mathematical reasoning.

Key Words: flipped classroom, undergraduate mathematics, analysis, Taylor expansion

1　はじめに

理工系大学で数学の基礎を学ぶことは最重要課題である。理数科目に長けていることで理工系大学を選んだ学生には，基礎数学を学ぶことはある程度楽しいと思われるが，高校までつらい思いをしながら数学の授業を受けてきた学生にとっては大学での数学の授業を受けることは苦痛かもしれない。例えば，高校では数Ⅰ，数Ａは教わったが，数Ⅱや数Ｂ，あるいは数Ⅲや数Ｃについては十分に教わってこなかった学生にとってである。AO 入試や推薦入試によって数学の筆記試験を免れて入学した学生，あるいは数Ⅰ，数Ａだけ入試問題で入学した学生はその類いに入る。

そのような多様な学生を含むクラスに対しては，手厚い学習支援の仕組みを準備することで学生が無理なく大学の授業についていけるような工夫がなされている。入学前の補習授業や学習支援センターによる基礎科目の個別指導はその一貫であり，例えば広島工大では LAC ナビがこれに相当する。これによって学生個々の学習意欲を高め，学力の向上を目指している。

しかし，そのようにしても，数学に興味のない学生には数学という科目を受講するつらさはあまり変わらないかもしれない。数学は理解するまでに時間がかかり，それを助ける手段が演習問題を解いていくことであることから，これまで講義に加えて演習を追加して理解を深めることが行

＊ 広島工業大学環境学部環境デザイン学科

われてきた。苦行の末に理解が待っているような構図である。確かに演習を行えば，あるパターンの問題に対しては類推によって問題に立ち向かうことができる。しかし，そのパターンから少しでも外れるともう応用が効かなくなる。そういう場面に何度もあっている。期末試験には対処できるかもしれないが，本当に理解しているとは思えない。そもそも，楽しくないつらいだけの授業で得られる果実は多い気がしないのである。そこで，まずは学生が授業を楽しいと思うところから出発できないかと考えた試みが「反転授業」である。

反転授業とは，「新たな学習内容を，通常は自宅でビデオ授業を視聴して予習し，教室では講義は行わず，逆に従来であれば宿題とされていた課題について，教師が個々の生徒に合わせた指導を与えたり，生徒が他の生徒と協働しながら取り組む形態の授業」である[1)]。しかし，ここでは，反転授業を，ビデオ学習を準備せずインターネットを使って自分で調べるような広い意味で用いている。数学の授業で反転授業を行なうことは少し難しい気がする。通常は，理解の上に立って議論や討論を進めることを前提としているのに，あまり理解しないまま進むために効果が薄いのではないだろうかという不安もある。しかし，まずは楽しく授業に臨むことが重要であると考えた。今回，数学をあまり得意としない学生が多い２学科でこのことを試みた結果，興味ある事実が得られたので報告する。

2　反転授業の経過

ES 学部の ED 学科と GES 学科の２学科の２年生の数学の選択科目の授業で行った。聴講者数は ED 学科16名，GES 学科20名である。ここでは，反転授業を行なった経過を簡単に述べる。後ほど内容について述べる。

着任して初めて受け持った授業なので，まずはシラバスに従って解析の積分から授業を始めた。リーマン積分について指定された教科書に沿って授業を進める。教科書では説明が不十分と思われるところを補う意味もあって，上積分と下積分を少し詳しく話をし始めた。教科書では不定積分から始めるが，ここでは定積分から厳格に始めた。そうしたら２回目の授業で，ある学生が「さっぱり分かりません」と言う。もちろん，イプシロン・デルタは使わないようにしている。区間［0, 1］で定義される関数 $f(x)$（$f(x)=1$（x は有理数），$f(x)=0$（x は無理数））の積分不可能性についての例を話したら混乱してきたみたいである。それでも授業を続けた。そのうち，聴講者の数が減ってきた。ED 学科では半分以下に，GES 学科でも同様であった。何とか興味を持ってもらおうと，話題を数学の実用性や他の科目との関連（例えば統計とか数値計算とか）との話題を提供することにも努めた。しかし，学生はただ座って聞いて（聴いてではない）いるだけのように見える。おもしろいと思われる話をしても反応が薄い。

ある日，冒険をしようと考えた。ES 学部では「テイラー展開」はこれまであまり深く取り扱ってはいないようであった。しかし，工学系の応用数学を習ってテイラー展開をおろそかにするというのはあまり理解できないので，思い切ってこれを主テーマにすることを考えた。学生に，「２週間後にテイラー展開について自分で調べて皆の前でプレゼンテーションを行いなさい」という課題を与えた。人から聴いて理解するより，他人に教えて自分を理解させる方がはるかに理解度が高くなるからである。それに，自分が参加するので刺激的であるし，何より楽しい。自発的に名乗り出る学生はいないだろうと考え，最初は各クラスで２名ずつ指名した。

2.1　GES 学科の１回目

結果は期待以上であった。まず，１人目は，テイラーという人となりについて，テイラーの定理について，テイラー展開について，ひととおりのことを紹介した。２人目は，本質的な面を探ろうと必死で，$\sin x$ の近似論を展開しようとした。プレゼンは初めてにしては上出来で，２人ともパワーポイント用の USB を持参してきていた。

発表後，フロアの学生からのコメントは，「分かりやすい」，「自分も勉強したいので何を使って調べたか教えて欲しい」，と概ね好評であった。びっくりしたのは質問であった。２人目の学生が $\sin x$ の近似法を紹介したが，フロアからの質問は，「x の値を変えたとき（０から離れたとき），どの程度の項まで使うと近似精度が良くなるのか」というものであった。テイラー展開の近似度は，展開の中心 a と目標とする値 x が近ければ線形や２次関数でも大丈夫というものだが，別に近くなくても $\sin x$ は多項式で表されるという定理である（関数の条件にもよるが)。では，離れてしまうとどのあたりで近似できなくなるのだろう，という疑問であった。これは，数値計算の本質をついた質問で，この質問を契機にまた新しい議論ができるようになった。次回の宿題（テーマ）として，「$\int_0^5 \exp(-t^2)dt$ の近似計算を行うとき多項式近似の方法は有効か，また何に注意しなければならないか」，「$\sin x$ の多項式展開がよい近似になるのはどこまでの項ならそうなるか，x と項数の関係について議論せよ」，「$\tan^{-1} 1$ にテイラー展開を使って計算されたの x 値について議論せよ」という課題を与えた。つまり，この学科では反転授業を取り入れたことは大成功であった。

2.2　ED 学科の１回目

ED 学科では１週目に発表予定者が無断欠席した。そのときは，その状況を理解できないでいた。しかし，後に

なって理解できるようになった（4節で述べる)。そのときは次回に延期ということで通常の授業を行なった。また，GES 学科での内容紹介をしておいた。

2.3　GES 学科の2回目以降

2回目の発表希望の学生は私の研究室に足を運び，やるべき内容を一緒に議論することで目標を自分なりに理解して見事な発表をこなした。もう1名も同様立派な発表であった。3週目はこれらの発表を見ている学生が「私も発表したい」と，次の2件のプレゼンテーションを行ってくれた。そして，翌週以降の発表予定も学生から自発的に予約された。

2.4　ED 学科の2回目

ED 学科では2回目も誰も準備しておらず，結局私が講義することになった。授業の内容はテイラー展開を使った近似計算（後述）についてである。結局，反転授業は成立せず普通の講義を続けたのでこの学科での試みは失敗に終わったかと思った。

2.5　ED 学科の4回目以降

ED 学科では4回目くらいまで，なぜ反転授業を進めているかという理由を継続して説明した。そのためか，名乗りをあげる学生がようやく出て来た。授業後「やりたいです」と2人同時に声をかけてきた。GES 学科に遅れること数週間であったが，ED 学科でも反転授業が始まった。逃げ出した学生はまだ来ていない。しかし，実は最後の最後になって彼は教室に戻ってきた。そして，力一杯のプレゼンテーションを見せてくれた。そこでは課題への内容を理解していた。このとき，ED 学科も追いついてきたという実感を得た。

2.6　GES 学科の熱気

一方，GES 学科の学生の「やる気」にはものすごい迫力があった。学生が「次元ののろい」という機械学習の難問に挑戦したのである。そのときにはそういう専門用語は使わず直接的な説明をしておいた。ある国立大の理系大学院生のレポート課題（期限は2週間程度から1月程度）と同じ問題のレベルであるが，一所懸命取り組んで正解を出していた。しかも，回答も早かった。更に，こちらが期待した計算法とは全く異なった計算法を用いている。課題は「n 次元球の体積と表面積を求めよ」と同じ問題になる。期待した計算法とは「重積分に変数変換を使ってガンマ関数の値から求める」方法である。これに対して全く異なった計算法とは「n 次元正規分布関数の積分に帰着させようとするやり方[2]」である。この方法を学生から見せられたときには仰天してしまった。

3　反転授業の内容

ここでは，まず「$\int_0^5 \exp(-t^2)dt$ を求めよ」という問題について紹介する。原始関数がないので，もちろん解析的には解は得られない。実は，これは「反面教師」の例題になっている。ある国立大の工学部の修士のある学生が，正規分布の数表計算をテイラーの定理を使おうと工夫した計算法を示してくれたのだが，取り扱いに注意しないと使えない（あるいはほとんど使い物にならない）例題になっている。この例は，実用的ではないが教訓として興味あることがらを多く含んでいるので今回これを取り上げた。実際にはこのような近似計算にはテイラーの方法は使わない。そういう意味では，学生にはテーマがちょっと難しかったかもしれない。そこで学生達との議論の後で解説を与えた。その内容を以下に示す。

なお，ここには示していないが，正規分布の確率の計算に用いる2重積分と変数変換については，学生にはこの後で説明しておいた。

また，本報告では n 次元球体の体積と表面積の計算については割愛した。

以下は，2学科での授業で行った内容をまとめたものである。なお，このスラドは slideshare[3] で観ることができる。

最近、大学初年で習う基礎数学は教えるのが段々難しくなっています。
授業形態と教える内容が陳腐になってきているからです。
情報やメディアが身のまわりではあまり手に入りにくかった頃、
大学では知的好奇心にあふれる学生を相手に知的な刺激を与えれてさえいればよかったと思います。
しかし、あらゆる情報が即座にほぼ無制限に得られる現在、
学生が知識に飢えていた時代とは異なった授業の展開が求められます。
即座に得られる知識ではなく、学生の頭をひっかきまわすことで学生自身が自分の考え方が変わったことを自覚させられるような授業
が今おもしろいではないか。
インターネット、ICT利用環境、良質のコンテンツを駆使して、学生と教員とがぶつかりあいながらお互いを刺激していく、
そんな授業の展開を考えたい。
これは、その実験授業の一つです。

学生に：
「課題を与えます。Taylorについて自分で調べて来週発表して下さい」

Taylor展開とは何だろう

1週目の授業は2人の学生のプレゼンテーションから始まりました。

1人目はTaylorの人となりを話してTaylorの定理を説明しました。

2人目は、前回数値計算の講義ノートを与えていたためか、近似計算について話そうと必死でした。彼はsin$x$のTaylor展開をとりあげました。

ハプニングはこの後起こりました。
フロアの学生の質問：nをどの程度とればいい近似ができますか。

主催者としては大喜びです。目論見通りの質問が出たからです。すかさず、

次回のテーマ
1: sin$x$のTaylor近似についてxとnの関係について調べなさい
2: exp(-x^2)を0から5まで積分した値を求めなさい

Taylor展開

無限回微分可能な関数 $f(x)$ は多項式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

による級数で表される。ただし、剰余項 $R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

は 0 に収束するという条件のもとで。

わからん
何を言いたいんや
何がおもしろいんや

1: sin$x$のTaylor近似について調べなさい
x=20のときにnがいくつまで必要か調べていました
大成功！

2: exp(-x^2)を0から5まで積分した値を求めなさい
実は、これは「反面教師」の例題になっています。
そういう意味では、こちらはテーマがちょっと難しかったので
議論の後、解説を与えました。

左辺　　右辺

無限回微分可能な関数　　多項式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ぴったり等しい
ある近傍の話じゃない
すげえ

学生への説明を始めます。

学生へのスライドには枠を入れています。

課題：
$$\int_0^5 e^{-x^2}dx$$ 定積分を数値的に求めよ。

最初に

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + const.$$

xをx^2に変えると

$$\int e^{-x^2}\,dx = ?$$ 簡単そう

しかし、原始関数が解析的に表せない

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

は求められる。ただし、2重積分の知識が必要

後で説明する

発想 1

Taylor展開を使ってみよう

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{for all } x$$

は、すべての x において成立しているから、使えるはず！

そうすると、項別積分もできるから右辺の多項式で計算

最初に

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + const.$$

xをx^2に変えると

$$\int e^{-x^2}\,dx = ?$$ 簡単そう

しかし、原始関数が解析的に表せない

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

をどのように求めよう。

数値計算法を使う

どんな方法がある？

課題：$\int_0^5 e^{-x^2}\,dx$ 定積分を数値的に求めよ。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

$$\int e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \cdots$$

$$5 - \frac{5^3}{3} = -36.6667$$

$$5 - \frac{5^3}{3} + \frac{5^5}{5\times 2!} = 275.833$$

あれっ、収束しそうにない！

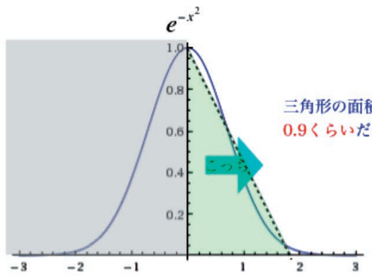
$$5 - \frac{5^3}{3} + \frac{5^5}{5\times 2!} - \frac{5^7}{7\times 3!} = -1584.29$$

ここでおおざっぱな計算をしておおよその見当をつけておきます。

$f(x)$と有限項までのTaylor展開の関係は？

$$\int e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \cdots$$

課題：$\int_0^5 e^{-x^2}\,dx$ 定積分を数値的に求めよ。

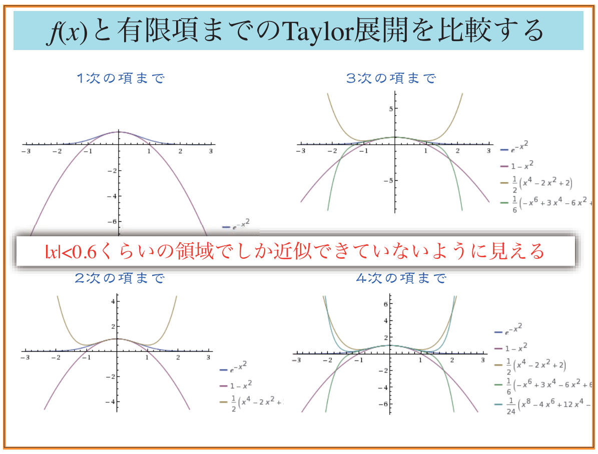


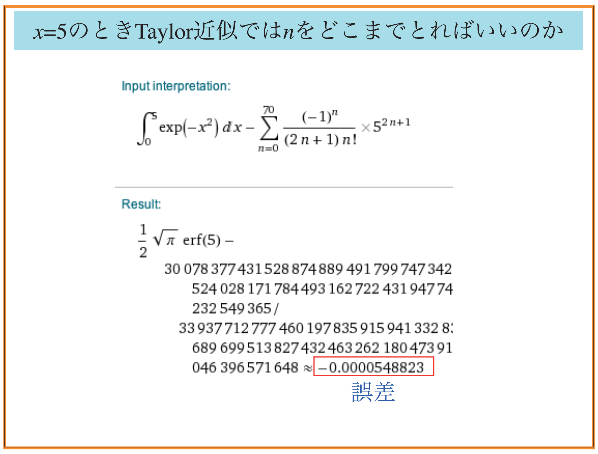
三角形の面積で近似すると

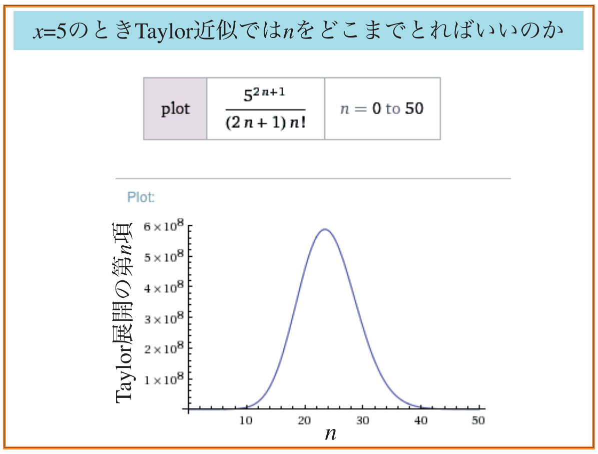
0.9くらいだな

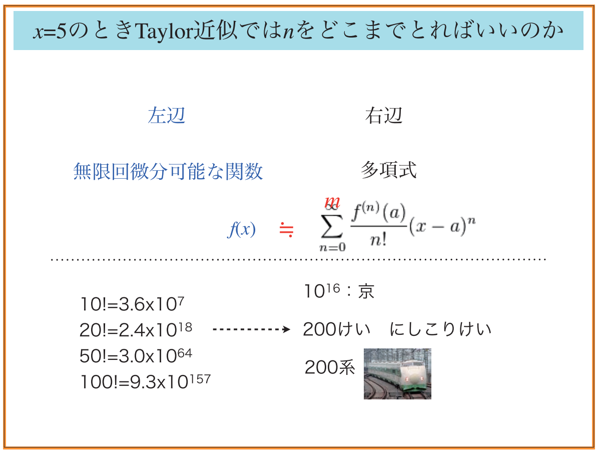
もう分かりましたね。これが今回のテーマです。

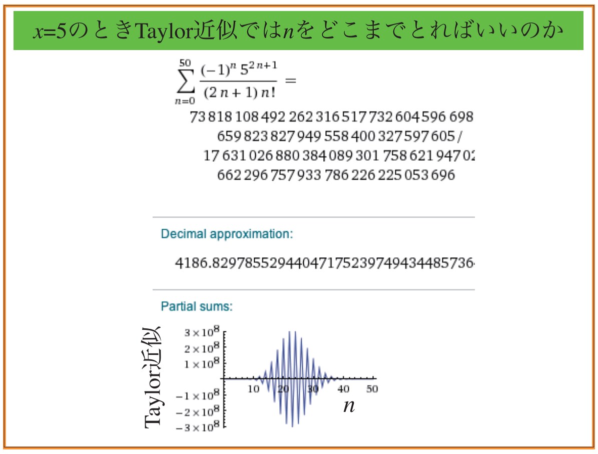
「数学」で教えるTaylorの話と、実際に使うTaylor展開の違いです









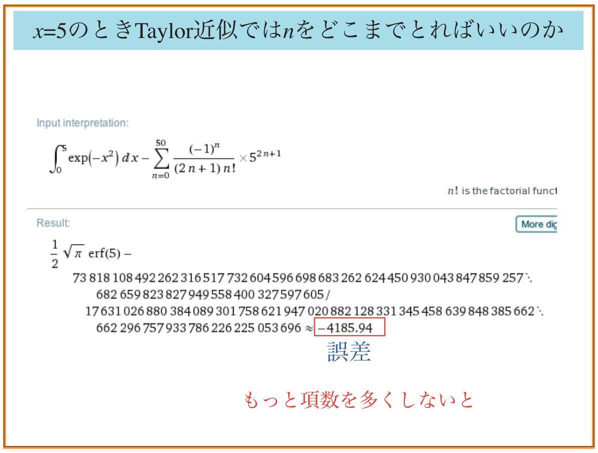


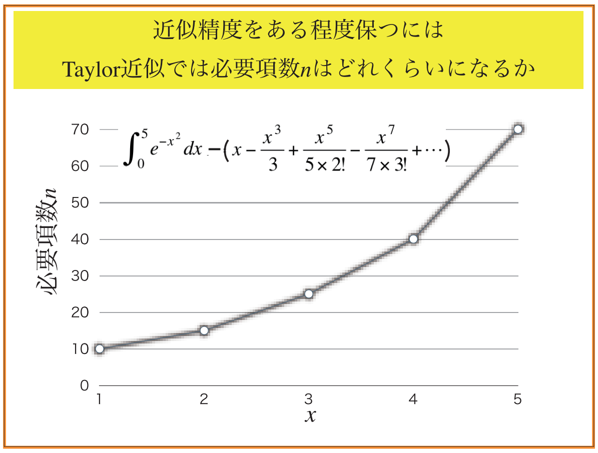
このスライドを流したとき、ギャグをと思って200系を言いますが
無反応

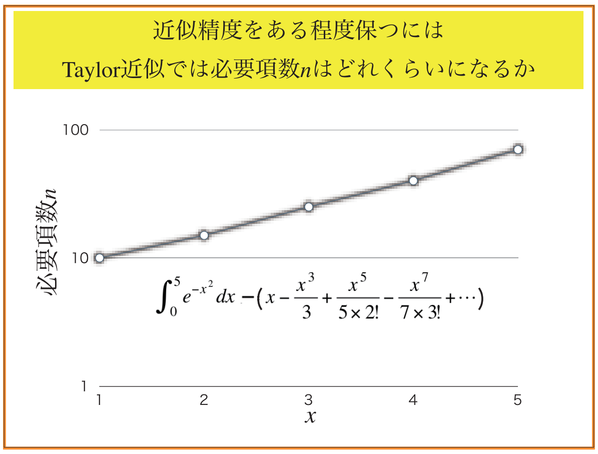
別の授業でこれを紹介したら、学生がぶつぶつ独り言を言っている
聞き耳を立てると　にしこりけい

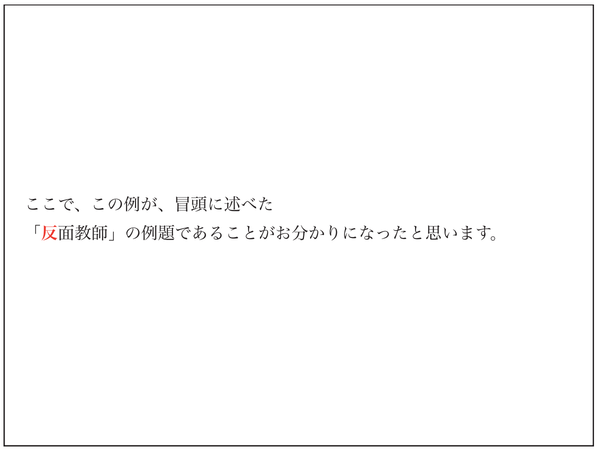
さらに別の授業で　にしこりけい　を出すと
「今日の授業で一番おもしろかったのは　にしこりけい」

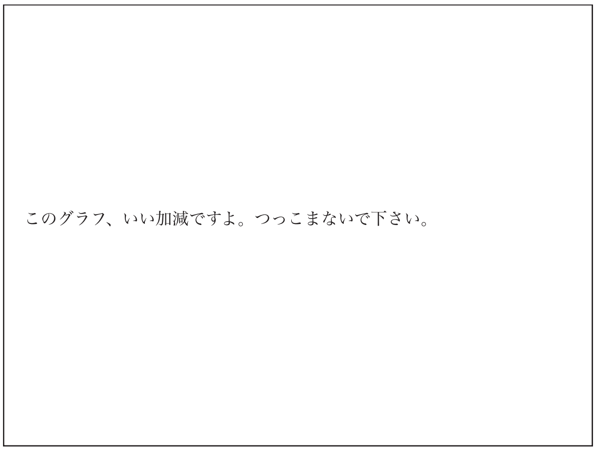
20の階乗はもう忘れないでしょう

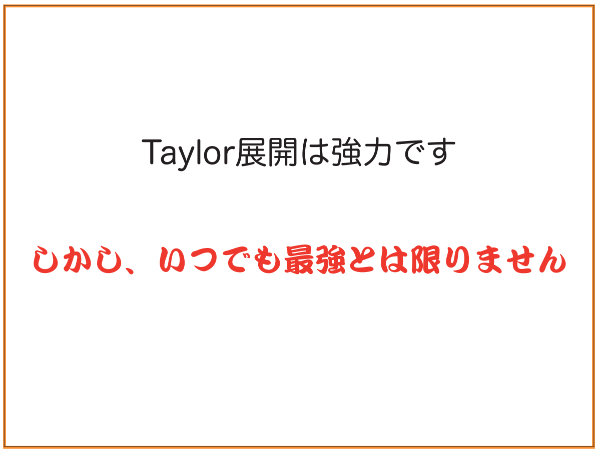


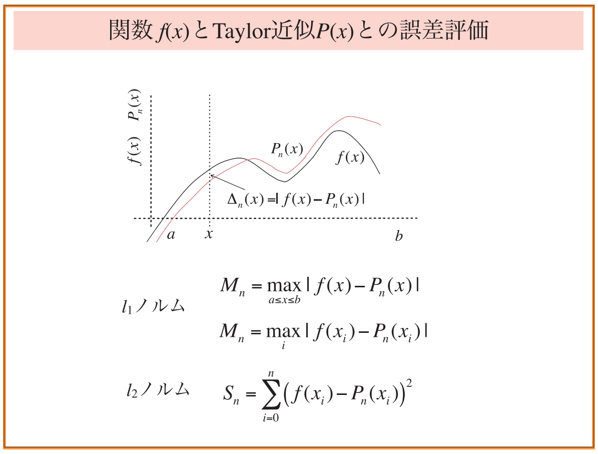


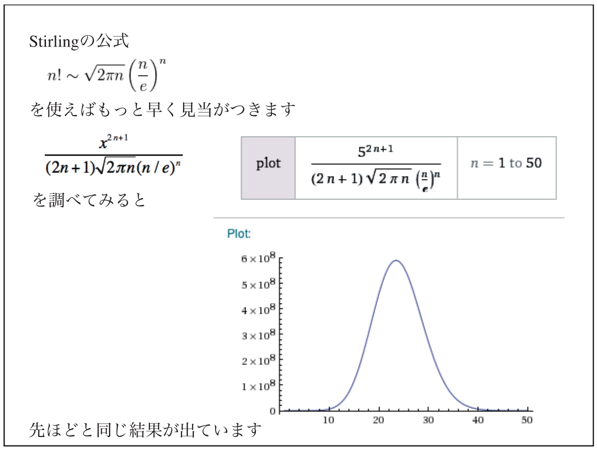


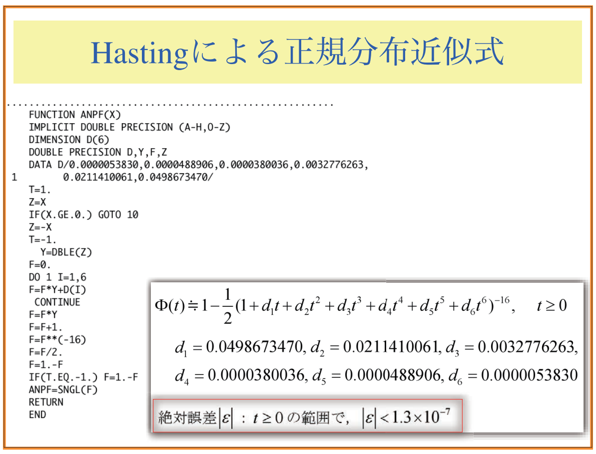












4　反転授業の反応

学生は最初多いにとまどった。授業では座って聞いていて，期末試験になると重要なところを覚えておいて合格点をとれば済む予定だったが，パワーポイントは使ったことがない，インターネットには自分の知らないことが書いてある，はじめて発表させられる，質問にも答えなければならない。ストレスは相当なものだっただろう。GES学科の学生があまり違和感なくこの取り組みに臨むことができた理由の一つはパワーポイントを1年生から使っている経験があるからであると考えられる。そこへの不安感はない。

しかし，ED 学科の学生が最初尻込みしたのはテーマの難しさもあるが，GES 学科と違ってパワーポイントを利用する経験が不足していたことによるものと思われる。その障壁が高くて手が出なかったものと思われる。なぜなら，プレゼンテーションにパワーポイントを使わなくてもよいと言ったら黒板とチョークを使ったプレゼンテーションを行ったからである。ちょっとしたことで躊躇したのであろう。入学と同時にコンピュータリテラシーを徹底させることが重要であることが分かる。

さて，通常の一方向での座学形式ではなく，このような形で教員と学生が双方向でかかわることができる授業を，実は学生は望んでいる。そういう学生はきっと多い。なぜなら，スマホを使えば情報はいくらでも手に入る時代，授業中に分からないことがあると「教えて goo」ではなく，「そうだ，Siri[4] に聞こう」という発想にまで進行している。授業がつまらないと，机の下ではスマホで誰かと情報交換したり，自分にとって価値ある情報を集めている。電子的に出席を取られ，座っているのが苦痛かもしれない授業を受けなければならないのは，ある学生にとっては苦行にも等しいのかもしれない。できるだけ授業に参加させたい，楽しく授業を受けてもらいたい，できれば数学を好きになってもらいたい，そのように考えて取り組んだ反転授業であった。学生からの感想を最後につける。

5　反転授業の感想

学生からの感想のうちいくつかを列挙してみた。

1）広工大の授業は先生が一方的に説明する授業が多いのでこのような自分で発表する機会をもつことができよかった。確かに授業を聞くだけの方が時間も手間もかからないので楽だけど，やはり自分から勉強する気がないと理解もできないだろうし成長できないと思う。私は n 次元球の体積について発表したが，発表するからにはまず自分が理解する必要があるし，それをどうわかりやすく説明するか考える必要がある。パワーポイントでの発表はさまざまな面で自分を成長させてくれるものではないかと思う。特に，私はパソコンが苦手なので，パワーポイントを作る勉強からはじめることができたし，自分から進んで理解しようともした。インターネットの内容からピックアップしたが，自分でも理解できないところがあって，まだ引っかかっているので今後ふと思い出して考え直すきっかけにもなると思う。私は自分で考えて発表する授業やグループワークが好きだ。このような授業が大学内で増えれば大学全体が高まっていくと思うし，理解できる喜びが分かれば勉強がもっと楽しくなると思う。だから，今回の解析基礎Ⅱのパワーポイントを使った授業は私にとって良い経験になった。

2）自分で調べたところは理解を深めるきっかけになって良かったです。また，更に興味が湧きました。同じテーマを複数人が扱うことにより，他の人と考えを共有することができ，新しい発見につながりました。テイラー展開については教科書に書いてあることを少し追求することができたと思っています。また，プレゼンテーションを行うにあたって自分が理解していないところがどこなのか，どこまで理解しているのかをしっかり見つけながら進めることができてよかったです。

3）クラスメイトが先生みたいで分かりやすかったです。自分が発表すればその部分については忘れないだろうと思います。

4）自分の力で考えることがいかに難しく，どれほど有意義なことかが実感できたと思う。

5）着実に求めたいものに近づいていっている自覚があって，解いていって楽しかった。

6）自分で調べることで普段よりも真剣に取り組むことができた。また，自分の調べたところが間違っていることを教えてもらったので理解度も普段よりも深まった。

この他に，今回の試みは楽しかったか，今回の試みは刺激的だったか，このような授業をまた受けたいと思うか，を「はい，いいえ」で，また授業評価を10点満点で回答してもらった結果，

楽しかったか：「はい」67%，「いいえ」27%

刺激的だったか：「はい」100%，「いいえ」０%

また受けたいか：「はい」79%，「いいえ」21%

１から10までの10段階の評価：平均＝6.9，標準偏差＝1.3であった。刺激的なのでまた受けたい気もするが楽しさは人によると思われる。しかし，概ね好意的に受け取ってもらっている。

6　まとめ

大学の数学基礎の授業に反転授業を取り入れてみた。ビデオによる予習を行う代わりに，もっと難しく，自分でインターネットなどを使って調べて発表する，という内容にした。普通のテーマではなく，かなり高度なテーマを選んだため，学生には相当きつかったのではないかと思うが，その反面，自分で納得がいくまで調べなければ皆の前で発表できないというプレッシャーが良い方向に働く場合と悪い方向に働く両方の面を観察することができた。良い方向とは積極的に活用して自分の成長を促そうとする態度であるが，悪い方向とはテーマの難しさに尻込みして逃げ出してしまう態度である。テーマの選択にも細心の注意が必要であることが分かった。今後もこのような授業法を取り入

れることによって学生が自ら学習する態度を身に付けられるようにしていきたい。

生きているのだから，人生は一度だから，過ごしている時間を楽しく，実のあるものにしていきたい。そう考えている。

文　献

1）https://ja.wikipedia.org/wiki/反転授業
2）http://homepage2.nifty.com/eman/statistic/sphere_vol.html
3）https://www.slideshare.net/HideoHirose/taylora
4）http://www.apple.com/jp/ios/siri/