

イデアルによる零因子グラフに関連する数学教育について

神田 隆至*・金光 三男**

(平成23年10月25日受付)

On the mathematics education related to the ideal-based zero divisor graphs

Takashi KANDA and Mitsuo KANEMITSU

(Received Oct. 25, 2011)

Abstract

Let R be a commutative ring and I be an ideal of R . By S.P. Redmond, the ideal-based zero-divisor graph $\Gamma_I(R)$ is defined by the following statement: the vertices set is a set $\{x \in R - I \mid xy \in I \text{ for some } y \in R - I\}$ and the edges set is a set $\{[x, y]\}$ where $[x, y]$ is an edge such that $xy \in I$ for distinct two vertices x and y . Let $R = Z_n$ when Z is the integers and (n) is an ideal of Z generated by n . We consider the ideal-based graphs $\Gamma_I(Z_n)$ for $n = 1, 2, \dots, 20$. In particular, we treat the case that $n = pq$ and p^2 where p and q are distinct prime numbers. This graph is easily understood by students. We use the educational diagrams. These results are useful to students.

Key Words: ideal, zero divisor, zero-divisor graph, residue class ring, Hasse diagram, ideal-based zero-divisor graph, mathematics education

1. はじめに

ヴィゴツキーが生活的概念と科学的概念の発達の違いなど述べている内容を考察しよう(中村和夫[8], 2004年及び柴田義松[11], 2006年参照)。実際に科学的概念は子どもが学校で科学的知識の体系を習得することにより発達するが, 生活的概念は子どもの個人的な体験の中で, 体系性を欠いたまま発達するという。体系の在る無しが決定的で, 体系の外的概念では, 対象自身の間には経験的結合だけに限られている。

この科学的概念や生活的概念と関連して, 黒木哲徳([7], 2009年)によれば, ややもすると獲得される算数・数学が生活経験的な概念の段階で止まってしまう, いつまでも生活概念的な中から這い出すことができず, 問題を解法術的な考えに支配されたり解答が〇〇術的になったり, 機械的な暗記をせざるを得なくなる場合がある。科学的概念まで止揚され, 概念の体系化まで指導することや, 科学

的概念から生活的概念に降りて道筋をつなぐ役割や生活的経験的なものから数学的な構造を引き上げ認識させることが重要な教師の役割となると述べている。

このことを考慮に入れて少しずれるが, 具体的なイデアルによる零因子グラフを調べて, 進んだ高校生や大学生を対象にして, 科学的体系まではいかなくても何らかの一般化を試みよう。

2. Z_n のイデアルによる零因子グラフ

有限な数に対応する集合 Z_n の応用として, イデアルによる零因子グラフについて教育的に考察しよう。

まず Z を整数環, $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ を整数を n で割った余りの作る環(整数環 Z のイデアル (n) による剰余環)とする。グラフ $G = (V, E)$ は, V を頂点集合とし E を辺集合とするグラフを表すものとする。

定義 ([2], I. Beck, 1988年) R を可換環とする。グラ

* 広島工業大学情報学部知的情報システム学科

** 中部大学現代教育学部児童教育学科

グラフ $G = (V, E)$ が **I. Beck** の零因子グラフとは次の条件を満たすときをいう。

- (1) $V = R$
- (2) $E = \{[x, y] \mid \text{異なる 2 頂点 } x, y \text{ が } xy = 0 \text{ を満たす}\}$ 。

このグラフの頂点 0 はどの頂点とも隣接している。また、単元は 0 とのみ隣接している。I. Beck の零因子グラフではどれも同様の様子をしているから、0 と単元を除いて考えてもグラフの復元は容易であり、次の通常の零因子グラフを考察すればよいことが分かる。

定義 ([1], D.F. Anderson and P.S. Livingston, 1999年). 可換環 R の零因子全体を $Z(R)$, それから 0 を除いた零因子全体を $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ とおく。無向グラフ $G = (V, E)$ が **零因子グラフ** であるとは次の条件を満たすときをいう。

- (1) $V = Z(R)^*$
- (2) $E = \{[x, y] \mid xy = 0\}$

この I. Beck の零因子グラフの部分グラフである零因子グラフを一般化して次のイデアルによる (またはイデアルに関する) 零因子グラフを次のように S.P. Redmond は定義した。

定義 ([10], S.P. Redmond, 2003年). R を可換環としそのイデアルを I とする。無向グラフ $\Gamma_1(R) = (V, E)$ が **イデアル I による零因子グラフ** とは次の条件を満たすグラフをいう。

- (1) $V = \{x \in R - I \mid \exists y \in R - I \text{ for } xy \in I\}$ 。
- (2) $E = \{[x, y] \mid \text{異なる 2 頂点 } x, y \text{ が } xy \in I\}$ 。

Z_n に対してこのイデアルによる零因子を求めてみよう。但し、主として n は 20 以下とする。完全 2 部グラフは $K_{m, n}$ で表す。

$n = 2$ の場合: Z_2 は体であり、イデアルは (0) と Z_2 の 2 個のみである。



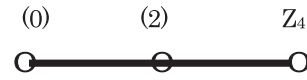
$n = p$ が素数のときは全てこの型である。
下記の補題よりイデアルによる零因子グラフは存在しない。

補題 可換環 R の $\Gamma_R(R)$ は存在しない。また素イデアル P による零因子グラフ $\Gamma_P(R)$ も存在しない。

[証明] $\Gamma_R(R)$ は定義より存在しない。可換環 R の素イデアル P に対して、 $\Gamma_P(R)$ の頂点 $a \in R - P$ とは、ある元 $b \in R - P$ が存在して、 $ab \in P$ となるときだから、 P は素イデアルだから $b \in P$ となり矛盾。よって頂点は存在しないから、イデアルによる零因子グラフ $\Gamma_P(R)$ は存在しない。
[QED]

$n = 3$ の場合: Z_3 は体であり、イデアル (0), Z_3 による零因子グラフは存在しない。

$n = 4$ の場合: Z_4 のイデアルは 3 個で、 Z_4 , (2), (0) である。



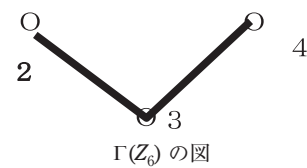
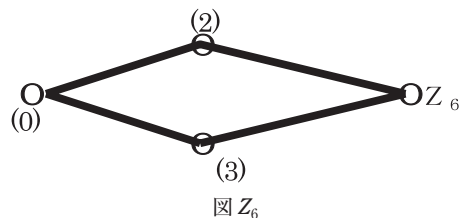
Z_4 による零因子グラフ, (2) による零因子グラフはどちらも存在しない。(0) による零因子グラフは下記の補題より、通常の零因子グラフ $\Gamma(Z_4)$ と一致する。このグラフは頂点が {2} のみの空グラフである。

新しい学習指導要領では素数が小学校 5 年生で導入されているが、一般に n が素数の場合 Z_n は体となる。素数とグラフ理論との関連については、M. Kanemitsu ([3], 2008 年) を参照。

補題 可換環 R が体でないとする。このとき、イデアル (0) による零因子グラフ $\Gamma_{(0)}(R)$ は零因子グラフ $\Gamma(R)$ と一致する。

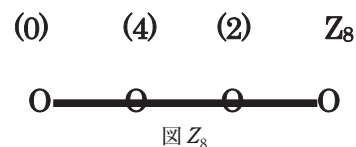
$n = 5$ の場合: Z_5 は体だからイデアルによる零因子グラフは存在しない。

$n = 6$ の場合: Z_6 のイデアルのハッセ図は下記の通りである。



$n = 7$ の場合: Z_7 は体だからイデアルによる零因子グラフは存在しない。

$n = 8$ の場合: Z_8 のイデアルは $Z_8 = (1) = (3) = (5) = (7)$, (2) = (6), (4), (0) の 4 個である。このイデアルのハッセ図は図 Z_8 である。

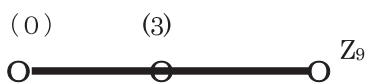


イデアルによる零因子グラフは $\Gamma_{(4)}(Z_8)$ と完全 2 部グラフ $K_{1,2} = \Gamma(Z_8)$ の 2 個である。 $\Gamma_{(4)}(Z_8)$ のグラフは図4-8である。

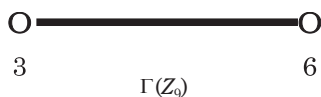


図4-8

$n = 9$ の場合: Z_9 のイデアルは $Z_9 = (1) = (2) = (4) = (5) = (7) = (8)$, $(3) = (6) = \{0, 3, 6\}$, (0) の 3 個である。イデアルのハッセ図は下記の通り。

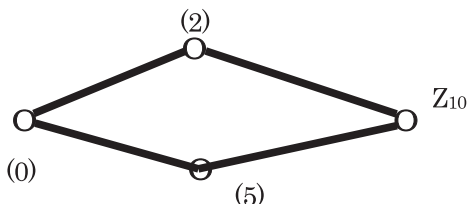


$\Gamma(Z_9)$ のみ零因子グラフである。



$\Gamma(Z_9)$

$n = 10$ の場合: Z_{10} のイデアルは, $Z_{10} = (1) = (3) = (7) = (9)$, $(2) = (4) = (6) = (8) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $(5) = \{0, 5\}$, (0) , の 4 個である。

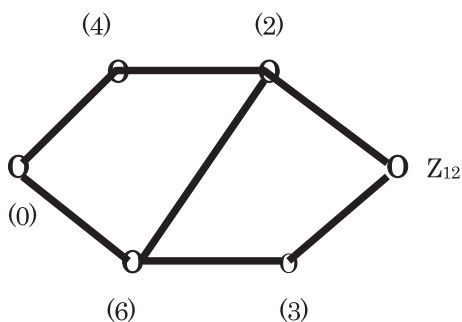


零因子グラフは $\Gamma(Z_{10})$ のみでこのグラフは林 ($K_{1,4}$) である。

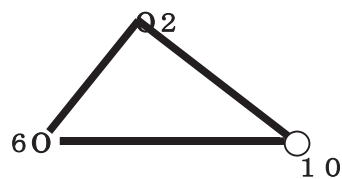
$n = 11$ の場合: Z_{11} は体だから零因子グラフは存在しない。

$n = 12$ の場合: Z_{12} のイデアルは $Z_{12} = (1) = (5) = (7) = (11)$, $(2) = (10) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $(3) = (9) = \{0, 3, 6, 9\}$, $(4) = \{0, 4, 8\}$, $(6) = \{0, 6\}$, (0) の 6 個である。イデアルによる零因子グラフは, $\Gamma_{(4)}(Z_{12})$, $\Gamma_{(6)}(Z_{12})$, $\Gamma(Z_{12})$ の 3 個である。

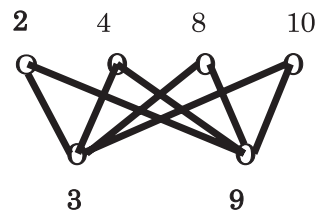
これがイデアルのハッセ図である。



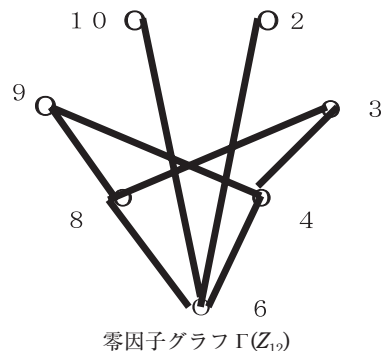
$\Gamma_{(4)}(Z_{12})$ のグラフは下図である。



これよりイデアル (6) による零因子グラフ $\Gamma_{(6)}(Z_{12})$, イデアル (4) による零因子グラフ $\Gamma_{(4)}(Z_{12})$ のグラフと零因子グラフ $\Gamma(Z_{12})$ である。完全グラフと完全 2 部グラフである。



イデアル (6) による零因子グラフ $\Gamma_{(6)}(Z_{12})$

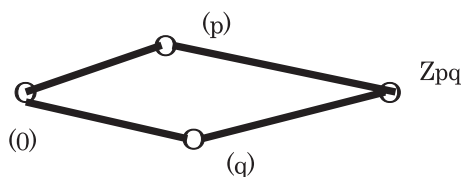


零因子グラフ $\Gamma(Z_{12})$

$n = 13$ の場合: Z_{13} は体であるので零因子グラフはできない。

$n = 14$ の場合: このくらいまでグラフを書いてみれば, $n = pq$ (p, q は異なる素数) のときは, Z_n のイデアルは Z_n , (p) , (q) , (0) の 4 個であり, (p) , (q) は素イデアルであり零因子グラフはできない。 Z_n も同様である。 (0) による零因子グラフは $\Gamma(Z_n)$ である。言い換えると,

補題 $n = pq$ (p, q が異なる素数で $p > q$) の場合は, $\Gamma(Z_n)$ が唯一つの零因子グラフである。イデアルのハッセ図は, 下図の通りである。零因子グラフ $\Gamma(Z_{pq})$ は完全 2 部グラフ $K_{p-1, q-1}$ である。



これにより, $n = 15$ の場合もイデアルによる零因子グラフは完全 2 部グラフ $\Gamma(Z_{15})$ のみである。

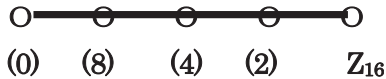
上図で 4-サイクルの個数 (四辺形の個数) は, 高校数

学 A で扱う組み合わせの個数

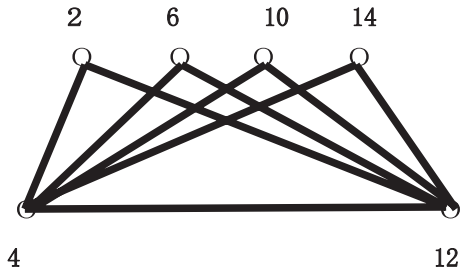
$$\begin{aligned} & {}_{p-1}C_2 \times {}_{q-1}C_2 \\ & = (p-1)(p-2)(q-1)(q-2)/4 \end{aligned}$$

であり教材として使用できる。頂点を共有しない 2 組の辺の個数は、 $(p-1)(p-2)(q-1)(q-2)/2$ 個である。この方面の詳しい文献は Y. Jin and M. Kanemitsu ([5], 2007年) や M. Kanemitsu ([4], 2010年) を参照。

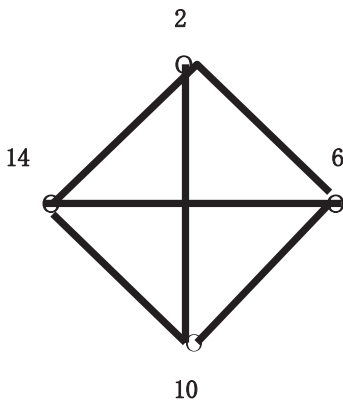
$n = 16$ の場合： Z_{16} のイデアルは Z_{16} , (2), (4), (8), (0) の 5 個である。



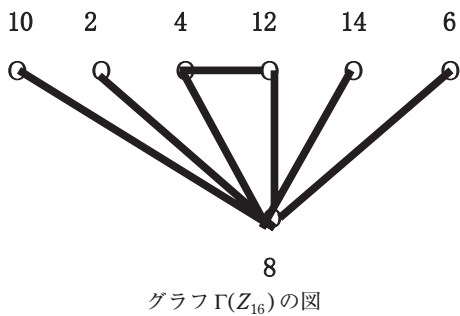
$\Gamma_{(8)}(Z_{16})$, $\Gamma_{(4)}(Z_{16})$, $\Gamma(Z_{16})$ の 3 つの零因子グラフが存在する。



グラフ $\Gamma_{(8)}(Z_{16})$ の図



グラフ $\Gamma_{(4)}(Z_{16})$ の図



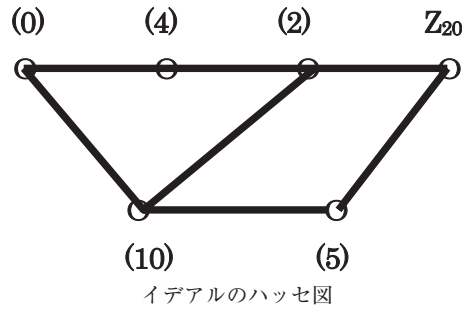
グラフ $\Gamma(Z_{16})$ の図

$n = 17$ の場合：零因子グラフは存在しない。

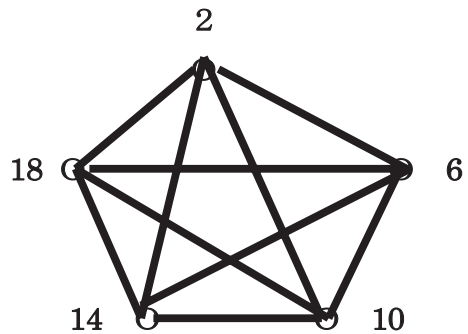
$n = 18$ の場合：神田隆至・金光三男 ([6], 2011年) 参照。

$n = 19$ の場合：零因子グラフは存在しない。

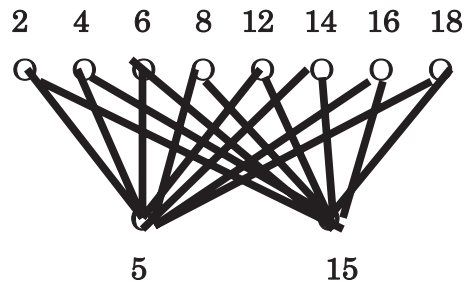
$n = 20$ の場合： Z_{20} のイデアルは Z_{20} , (2), (4), (5), (10), (0) の 6 個である。従って、 $\Gamma_{(4)}(Z_{20})$, $\Gamma_{(10)}(Z_{20})$, $\Gamma(Z_{20})$ の 3 個である。



イデアルのハッセ図



イデアル (4) による零因子グラフ $\Gamma_{(4)}(Z_{20})$ の図



イデアル (10) による零因子グラフ $\Gamma_{(10)}(Z_{20})$ の図

$\Gamma(Z_{20})$ のグラフは省略するが、四角形を含みペンダントが 2 個であり三角形を含まないグラフになる。

3. まとめ

ここで考察した零因子グラフは、オープンエンドアプローチ的な性格を持ち、画一的な答えを期待しなくて生徒・学生が多くの情報や問題・課題を得ることができ数学的思考が自由に可能である。教材の素材となる課題も多く見つけることが出来る。日本数学教育学会編 ([9], 2010年) に述べてあるが「小学校の算数では有限の対象を扱うことから、多くの内容が離散数学の側面を持つ。離散数学をカリキュラムにどのように取り入れ、生徒のどのような資質を育てるのかということは今後の課題である」。小学校から時間を経て、高校の微積では無限である実数を主として扱うので有限数ともいべき剰余類は不慣れで難しく感じられるかもしれないが新鮮でもあり、実数では成立する

が有限の数では成立しない別の世界があることが分かり豊かな数学の世界が実感できると思われる。0 や負の倍数も込めた集合の一般化でもあるイデアル、剰余環における四則計算を含みその中に多くの性質が発見できる代数的な内容とグラフ理論の性質の対応により、イデアルによる零因子グラフを Z_n に関する特別の場合で扱う上で述べたグラフは繰り返しになるが興味ある教材の素材となる。ヴィゴツキーのいう生活的概念に近い具体的な計算と図やグラフから科学的概念に類似の考えで一般化して、数学教育的に考察をした。これはまた学習指導要領で算数・数学科では筋道を立てて体系的に考えることや表現力では言葉・数式・図・表・グラフなどの育成や類推的な考え方である類比・帰納・演繹など育成に役立つと思われる。

文 献

- [1] D.F. Anderson and P.S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, 217 (1999), 434–447
- [2] I. Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra*, 116 (1988), 208–226
- [3] M. Kanemitsu, A note on graphs related to unit elements in Z_n , *The Global Journal of Applied Mathematics & Mathematics Sciences*, Vol. 1 No. 1 (2008), 51–52
- [4] M. Kanemitsu, The number of distinct 4-cycles and 2-matchings of some zero-divisor graphs, *In Automata, Formal Languages and Algebraic Systems* (Edited by M. Ito, Y. Kobayashi and K. Shoji, The International Conference Workshop on AFLAS) 63–69, (2010) *World Scientific*
- [5] Y. Jin and M. Kanemitsu, Beck's graphs associated with Z_n , and their characteristic polynomials, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, vol. 11 No. V07 (2007), 81–93
- [6] 神田隆至・金光三男, イデアルによるある零因子グラフと数学教育, *広島工業大学紀要 教育編 第10巻* (2011), 27–30
- [7] 黒木哲徳, 教育実践の観点から見た教科内容とその課題—算数科・数学科の場合—, 「数学教師に必要な数学能力形成に関する研究」*数理解析研究所講究録* 1657, 2009年 京都大学数理解析研究所
- [8] 中村和夫, ヴィゴツキー心理学—完全読本—, *新読書社*, 2004年
- [9] 日本数学教育学会編, 数学教育学研究ハンドブック, *東洋館出版*, 2010年
- [10] S.P. Redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, *Communications in Algebra*, 31 (2003), 81–93
- [11] 柴田義松, ヴィゴツキー入門, *子ども未来社*, 2006年