

# イデアルによるある零因子グラフと数学教育

神田 隆至\*・金光 三男\*\*

(平成22年9月13日受付)

## Zero divisor graphs by an ideal and mathematical education

Takashi KANDA and Mitsuo KANEMITSU

(Received Spt. 13, 2010)

### Abstract

Let  $R$  be a commutative ring and be an ideal of  $R$ . By S. P. Redmond, the ideal-based zero-divisor graph  $\Gamma_I(R)$  is defined by the following statement: the vertices set is a set  $\{x \in R - I \mid xy \in I \text{ for some } y \in R - I\}$  and the edges set is a set  $\{[x, y]\}$  where  $[x, y]$  is an edge such that  $xy \in I$  for distinct two vertices  $x$  and  $y$ . Let  $R = Z_{18}$  when  $Z$  is the integers and  $(18)$  is an ideal of  $Z$  generated by 18. This graph is easily understood by students. The coefficients of a characteristic polynomial are related to triangles, 4 cycles and 2-matchings. We use the educational diagrams. These results are useful to students.

**Key Words:** ideal, zero divisor, zero-divisor graph, Euler function, residue class ring, Hasse diagram, 2-matching, triangle, 4-cycle.

### 1. はじめに

零因子グラフの最初の研究は, I. Beck による可換環に付随した単純グラフの彩色数に関したものである。I. Beck は 0 も頂点として考察したが, その後, 可換環  $R$  に対して 0 以外の零因子を頂点とした零因子グラフ  $\Gamma(R)$  を, D. F. Anderson と P. S. Livingston は考察した。その後, S. P. Redmond は, 可換環  $R$  のイデアル  $I$  を使用してイデアルによる零因子グラフ  $\Gamma_I(R)$  を研究した。

ここでは,  $R$  を整数環の 18 を法とした剰余環  $Z_{18}$  とした特別の場合について, そのイデアル  $I$  による零因子グラフ  $\Gamma_I(Z_{18})$  について, それがどのようなグラフであるか, またその固有多項式  $f(\lambda, Z_{18}, I)$  の係数とグラフの 2-マッチングの個数や四辺形の個数などの関係について教育的に考察する。

上記で使用した記号の説明をしよう。  $Z$  は整数環を表わし, 整数  $n$  で生成されるイデアル  $(n)$  による剰余環を  $Z_n$

$= \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  で表わす。また  $Z_n$  の零因子全体を  $Z(Z_n)$ , この零因子全体から 0 を除いた集合を  $Z(Z_n)^*$ , 単元全体を  $U(Z_n)$  で表わす。更にオイラー関数を  $\varphi$  で表わすとき,  $n$  の素因数分解を

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

(ただし,  $p_1, p_2, \dots, p_r$  は異なる素数,  $e_1, e_2, \dots, e_r$  は負でない整数) とするとき,

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

なる関係がある。

**定義** (I. Beck [2])  $Z(Z_n)$  を頂点集合  $V(Z_n)$  とし, 異なる 2 頂点の積が 0 のときその 2 頂点は辺で結ばれている (隣接している) と定義し, 辺集合全体を  $E(Z_n)$  で表わすとき, グラフ  $\Gamma_0(Z_n) = (V(Z_n), E(Z_n))$  を I. Beck の零因子グラフとよぶ。

\* 広島工業大学情報学部知的情報システム学科

\*\* 中部大学現代教育学部児童教育学科

**定義** (D. F. Anderson and P. S. Livingston [1])  $Z(Z_n)^*$  を頂点集合とし、異なる2頂点の積が0のとき2頂点は辺で結ばれていると定義し、辺集合全体を  $E(Z_n)$  とするグラフ  $\Gamma(Z_n)$  を単に**零因子グラフ**とよぶ。

**定義** (S. P. Redmond [4])  $Z_n$  のイデアルを  $I$  とする。頂点集合は、 $Z_n - I$  の元  $a$  で、 $Z_n - I$  のある元  $b$  が存在して  $ab \in I$  となるような、 $a$  を頂点とする集合とする。異なる2頂点  $r, s$  に対して、 $rs = 0$  のとき  $r$  と  $s$  は辺で結ばれていると定義したグラフを、イデアル  $I$  による零因子グラフといい、 $\Gamma_I(Z_n)$  と記す。

上で述べたように、 $n = 18$  の場合にこのイデアルによる零因子グラフを考察しよう。 $Z_{18}$  の  $a$  によって生成されたイデアル  $I_a = (a)$  と書く。

$Z_{18} = \{0, 1, 2, \dots, 17\}$  であり、その単元全体  $U(Z_{18}) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$  の個数は、

$$\varphi(18) = 18 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6. \text{ また零因子全体}$$

$Z(Z_{18}) = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$  であり、従って0を除いた零因子  $Z(Z_{18})^*$  の個数は11である。

ヘルムート・ハッセ (1898年-1979年) に因んだハッセ図で、この零因子グラフと関連した教材 (大学生又は小学生に対する) を2件図示しよう。

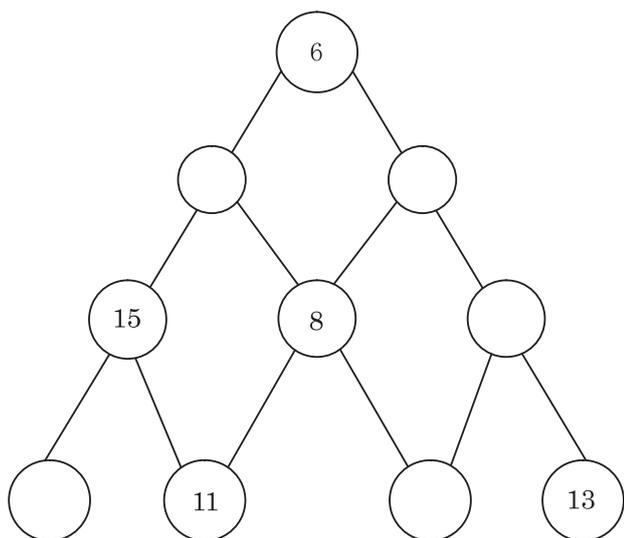


図1

図1と図2は次のように説明できる。図1は例えば最下段の○の中の数字は左から3, 11, 4, 13で、その上の段の数字は各下段の2数の積を mod 18 で表せば15, 8, 16になる。同様に考えるとその上の段の数字は12, 2となり、このことより頂上の6を得る。図2も同様である。

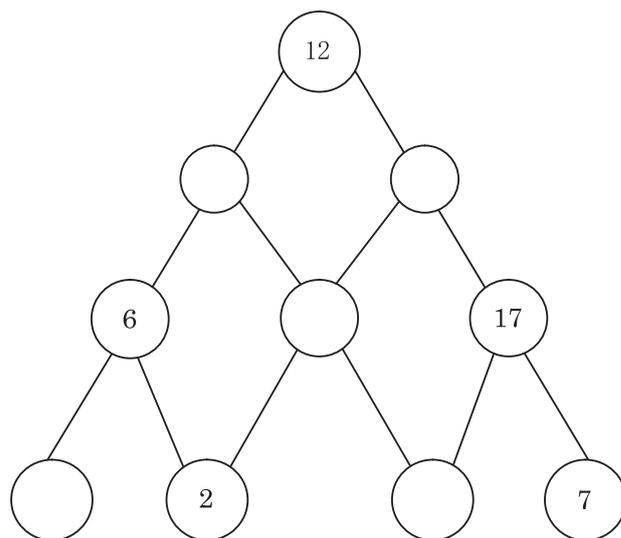


図2

## 2. $Z_{18}$ のイデアル

イデアルの個数は次の6個である。

$$I_0 = (0) = \{0\}$$

$$I_6 = I_{12} = (6) = \{0, 6, 12\}$$

$$I_9 = (9) = \{0, 9\}$$

$$I_2 = I_4 = I_8 = I_{10} = I_{14} = I_{16}$$

$$= (2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

$$I_3 = I_{15} = (3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$$

$$I_1 = I_5 = I_7 = I_{11} = I_{13} = I_{17} = Z_{18}$$

イデアルの包含関係によるハッセ図は図3のようである。

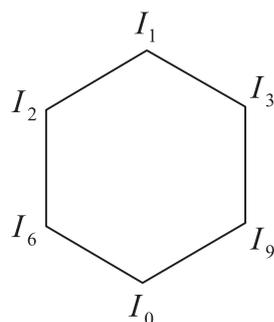


図3 イデアルのハッセ図

## 3. イデアルによる零因子グラフ $\Gamma_{I_0}(Z_{18})$

イデアルのハッセ図から、 $I_2 = (2)$  と  $I_3 = (3)$  は極大イデアルだから素イデアルである。定義からグラフはできない。 $Z_{18}$  もグラフはできない。また  $I_0 = (0)$  による零因子グラフ  $\Gamma_{I_0}(Z_{18})$  は D. F. Anderson 達の定義した零因子グラフ  $\Gamma(Z_{18})$  と一致する (図4)。

$\Gamma_{I_6}(Z_{18})$  は図5、 $\Gamma_{I_9}(Z_{18})$  は図6のように完全グラフ  $K_4$  である。

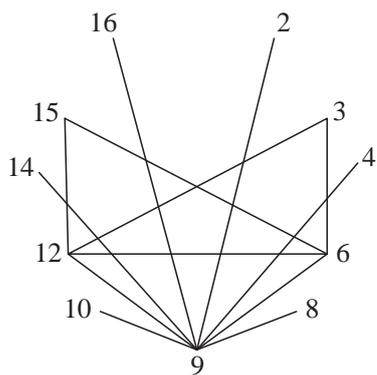


図4  $\Gamma_{I_0}(Z_{18})$  のグラフ

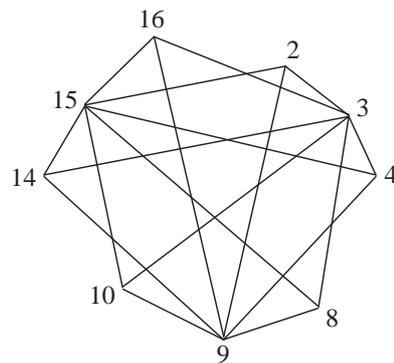


図5  $\Gamma_{I_6}(Z_{18})$  のグラフ

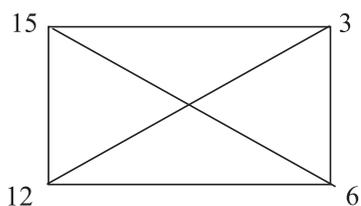


図6  $K_4 = \Gamma_{I_9}(Z_{18})$  のグラフ

において、13はこのグラフの辺の総数を表し、6は三角形の個数の2倍を表している。30は四辺形の個数と2-マッチングの総数から決まる。

異なる4辺形の総数を  $N_c$  とし、 $N_M$  を2-マッチングの総数とすると、次の公式が成立する。

$$N_M = 1/8 (\text{各頂点の次数の総和})^2 - 1/2 (\text{各頂点の次数の2乗の総和}) + 1/4 (\text{各頂点の次数の総和}).$$

(Y. Jin と M. Kanemitsu [3] 定理 2.3 より)。

#### 4. イデアル $I_0$ による零因子グラフ

$\Gamma_{I_0}(Z_{18})$  の固有多項式

$$f(\lambda, Z_{18}, I_0) = \lambda^{11} - 13\lambda^9 - 6\lambda^8 + 30\lambda^7 + 24\lambda^6$$

これより、 $N_c = 3$ 、 $N_M = 36$  となり、 $N_M - 2N_c = 36 - 2 \times 3 = 30$  となる。三角形や四角形などの計算には、図7を利用すると便利である。

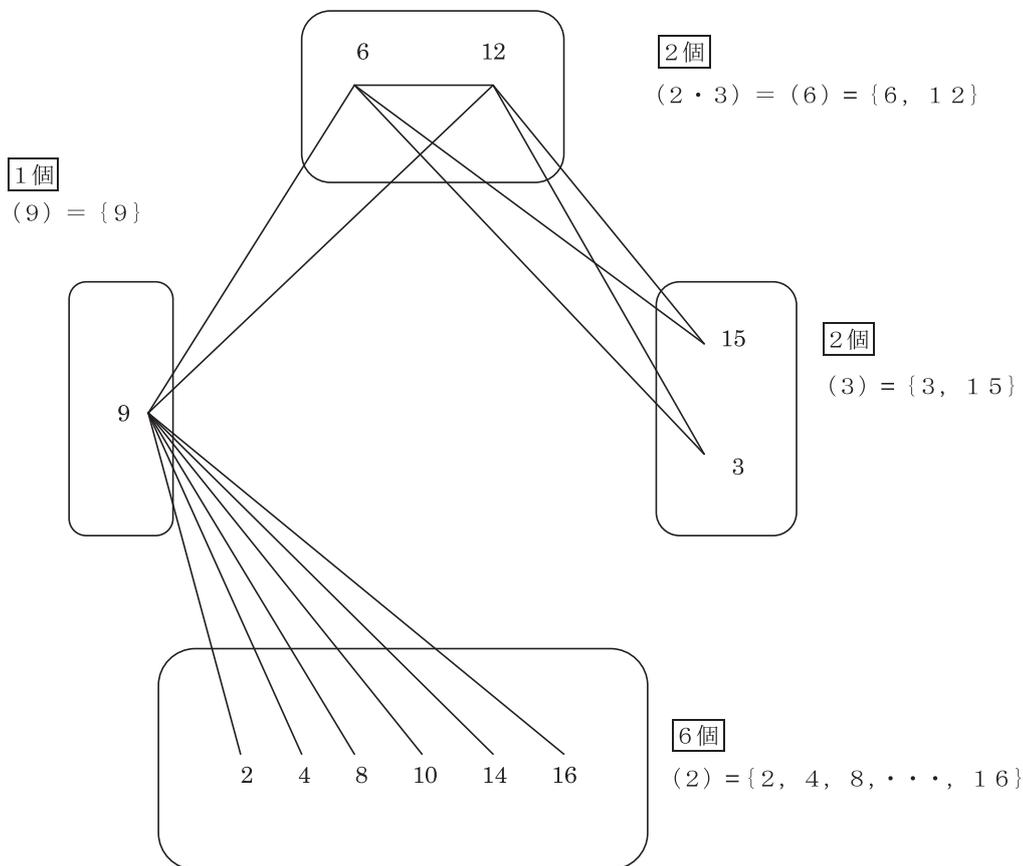


図7  $\Gamma_{I_0}(Z_{18})$  の辺、三角形、四辺形を計算する図

### 5. イデアル $I_6$ による零因子グラフ

このグラフの固有多項式  $f(\lambda, Z_{18}, I_6)$  は,  
 $f(\lambda, Z_{18}, I_6) = \lambda^9 - 18\lambda^7$  である。4角形の個数  $N_c = 45$  で,  $N_M = 90$  であるから,  $\lambda^5$  の係数は0である。

第4節の場合と同様に, 三角形や四辺形などの計算には, 図8を利用すると便利である。

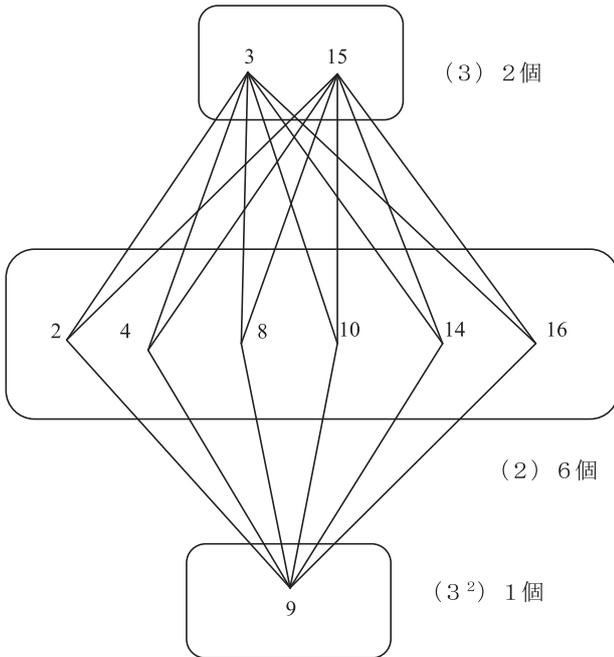


図8  $\Gamma_{I_6}(Z_{18})$  の辺, 三角形, 四辺形を計算する図

### 6. イデアル $I_9$ による零因子グラフ

このグラフは完全グラフ  $K_4$  である。固有多項式

$f(\lambda, Z_{18}, I_9)$  は

$$f(\lambda, Z_{18}, I_9) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$$

また,  $N_c = 3, N_M = 3$  となる。

上の固有多項式で  $\lambda^2$  の係数  $-6$  は辺の個数にマイナスを付けたものであり,  $-8$  は, 4個の頂点から3個を選ぶ組み合わせの数の2倍をマイナスにしたもので

$$-2 \times {}_4C_3 = -2 \times 4 = -8$$

である。また定数項は,  $N_M - 2N_c = 3 - 6 = -3$  となる。

#### 参考文献

- [1] D. F. Anderson and P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **217** (1999), 434-447
- [2] I. Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra* **116** (1988), 208-226
- [3] Y. Jin and M. Kanemitsu, Beck's graphs associated with  $Z_n$  and their characteristic polynomials, *International J. of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 11 No. V07 (2007), 81-93
- [4] S. P. Redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, *Communications in Algebra*, **31** (2003), 4425-4443